42 questions « type-bac » **2020**

Série **ES** - Mathématiques

Enseignement obligatoire

Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Félicitations !

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;

4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://specialite-maths.fr/

Table des matières

Suites

À QUOI ÇA SERT ?

Les suites permettent de modéliser l'évolution de certains phénomènes : par exemple l'évolution d'un capital placé au cours des années (formule $C_n = C_0(1+i)^n$ où i est le taux d'intérêt), ou encore l'évolution d'une probabilité p_n par rapport à certaines unités de temps, ou encore traduire certaines propriétés mathématiques : la suite des entiers impairs $(2n-1)$ ou $(2n+1)$, des carrés (n^2) des puissances de 2 à savoir (2^n), etc. On utilise pour cela la notation indicielle (avec la lettre u ou une autre, peu importe) : u_0 est généralement la valeur initiale (parfois u_1) et u_n désigne la valeur à la n-ième étape du processus (ou terme de rang n). Le successeur du terme u_n est alors noté u_{n+1}. Et le successeur de u_{n+1} est alors u_{n+2}. Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ puis pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Chaque terme s'obtient en faisant la somme des deux précédents.
On obtient alors $u_2 = u_1 + u_0 = 1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$ etc.
Contrairement aux fonctions pour lesquelles la variable x est un réel, dans les suites, la variable n est un entier naturel. Une suite est en fait une fonction définie sur $\mathbb{N}$. La plupart des suites sont « quelconques » mais certaines ont des propriétés spécifiques :

- suites arithmétiques : on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r : $u_{n+1} = u_n + r$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 + nr$ (on passe de u_0 à u_n en ajoutant n fois la raison r) ;
- suites géométriques : on passe de chaque terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité q : $u_{n+1} = u_n \times q$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 \times q^n$ (on passe de u_0 à u_n en multipliant n fois par la raison q) ;
- suites croissantes : chaque terme est inférieur au suivant : $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$;
- etc.

Comme on l'a vu ci-dessus, certaines suites sont définies de façon « explicite » comme par exemple $u_n = n^2 + 3$. Dans ce cas, on peut immédiatement calculer n'importe quel terme de la suite (par exemple $u_5 = 28$) mais on ne saisit pas forcément le lien entre deux termes successifs. D'autres suites sont définies par « récurrence » (de proche en proche) comme par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ (on donne la valeur d'un terme initial puis une formule donnant chaque terme qui se définit à partir du (ou des) précédent(s)). Dans ce cas, on voit le *lien* entre les termes (on passe d'un terme au suivant en ajoutant les entiers impairs successifs) mais on ne peut pas calculer immédiatement n'importe quel terme de la suite. Souvent, dans les exercices, on doit passer d'une écriture à l'autre. Par exemple en partant de la formule explicite $u_n = n^2 + 3$ on peut chercher une relation de récurrence. Pour cela on ré-écrit la formule en remplaçant u_n par u_{n+1} :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 = u_n + 2n + 1$$

1.1 Suites géométriques

RAPPEL DE COURS

Suite géométrique

Une suite (u_n) est dite *géométrique* lorsqu'on passe de chacun de ses termes au suivant en multipliant toujours par la même quantité q, appelée *raison*. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Dans le cas d'une suite géométrique, on peut alors exprimer n'importe quel terme u_n en fonction du rang n *via* la relation :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Variante : $$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Et plus généralement encore : $$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

La somme des $n+1$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule suivante :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0\left(1 - q^{n+1}\right)}{1-q}$$

En particulier (lorsque $u_0 = 1$) :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

⚠ Les formules de somme ci-dessus sont valables lorsque la sommation s'effectue à partir de u_0 et jusqu'à u_n (ce qui fait $n+1$ termes). Dans les autres cas, on recommande la formule suivante :

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \frac{P\left(1 - q^N\right)}{1-q}$$

où P est le premier terme de la somme et N le nombre de termes de la somme (ici $N = n - k + 1$).

Q 1 - Suite géométrique et pourcentages

[★] [40%]

Un étudiant paye un loyer mensuel de 400 euros pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%. On note u_n le loyer mensuel après n années, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1, c'est-à-dire le montant du loyer mensuel après une année.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Après 6 années, le montant du loyer mensuel a augmenté de :

☐ 42% ☐ 50% ☐ 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

1. Une augmentation de 7% se traduit par une multiplication par $\left(1 + \frac{7}{100}\right) = 1{,}07$. Ainsi :

$$u_1 = 1{,}07 \times u_0 = 428$$

Après une année, le montant du loyer mensuel de cet étudiant est de 428 euros.

2. Chaque année, le montant du loyer est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1{,}07$. La suite (u_n) est donc géométrique ; ainsi on a :

$$u_n = u_0 \times q^n = 400 \times 1{,}07^n$$

3. Il s'agit de calculer u_6. D'après la question précédente :

$$u_6 = 400 \times 1{,}07^6 \approx 600$$

Le montant du loyer est passé de 400 euros à 600 euros, il a donc augmenté de 50%. On peut le voir également en calculant juste $1{,}07^6 \approx 1{,}50$; bref :

☐ 42% ☒ 50% ☐ 13%

Ainsi, avec les pourcentages, 6 augmentations successives de 7% ne donnent pas une augmentation de 42% mais bel et bien une augmentation de 50%.

....

Q 2 - Calcul du coût total d'un crédit [★★] [20%]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) la somme remboursée la n-ième année.

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$. En déduire u_{10}.

3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

1. Une augmentation de 2% se traduit par une multiplication par $\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1{,}02$. Ainsi :

$$u_2 = 1{,}02 \times u_1 = 7344$$

La seconde année, la somme remboursée est de 7344 euros (ce qui fait une mensualité de 612 euros).

2. Chaque année, ce montant est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1{,}02$. La suite (u_n) est donc géométrique (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) ; ainsi on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 7200 \times 1{,}02^n$$

On en déduit :

$$u_{10} = 7200 \times 1{,}02^9 \approx 8605$$

La dixième année, la somme remboursée est de 8605 euros (soit une mensualité de 717 euros environ).

3. Nous devons déjà calculer la somme totale remboursée sur l'ensemble des dix années :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$

Nous avons affaire à la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$. Or, la somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique (de terme initial u_1) est donnée par la formule suivante :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \frac{u_1\left(1 - q^N\right)}{1 - q}$$

Donc :

$$S = \frac{u_1\left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = \frac{7200\left(1 - 1{,}02^{10}\right)}{1 - 1{,}02} \approx 78838$$

Le coût total du crédit est donc de $78838 - 64000 = 14838$ euros.

....

RAPPEL DE COURS

Résolution d'(in)équations dont l'inconnue est en exposant

Pour résoudre une équation du type $a^n = b$ ou une inéquation du type $a^n \geqslant b$ où a et b sont des réels strictement positifs ($a \neq 1$) et n un entier inconnu, l'idée est d'utiliser **la fonction logarithme**. En effet, grâce à la relation $\ln\big(a^n\big) = n\ln(a)$, il y a moyen de simplifier l'équation. L'équation $a^n = b$ devient alors :

$$\ln\big(a^n\big) = \ln(b)$$

$$n\ln(a) = \ln(b)$$

$$n = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

On procède de même pour résoudre l'inéquation.

Attention pour les inéquations ! Lorsqu'on divise par $\ln(a)$, bien songer que ce nombre peut très bien être négatif (cela se produit lorsque $a \in]0\,,1[$) ; il faut alors changer le sens de l'inégalité. Par exemple :

$$0{,}9^n \leqslant 0{,}5$$

$$\ln\big(0{,}9^n\big) \leqslant \ln(0{,}5)$$

$$n\ln(0{,}9) = \ln(0{,}5)$$

Mais $\ln(0{,}9) < 0$ donc :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)}$$

Et comme n est entier :

$$n \geqslant 7$$

Q 3 - Somme des termes d'une suite géométrique

[★★] [34%]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000 + n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0{,}95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

1. Chaque année, la quantité commercialisée est réduite de 5% donc multipliée par 0,95. On a donc, pour tout entier n compris entre 0 et 19 :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n$$

Autrement dit, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$. Par conséquent, on a :

$$u_n = u_0 \times 0{,}95^n = 80000 \times 0{,}95^n$$