80 questions « type-bac » **2020**

Série **S** - Mathématiques

Enseignement obligatoire

Énoncés seuls

⚠ Téléchargez nos documents complets **avec corrigés** afin d'optimiser votre préparation au baccalauréat !
Vous ferez le bon choix ! Vous progresserez en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité !
Gain possible sur votre note de bac si vous travaillez avec les corrigés : 5 à 10 points sur votre note !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles ;

4. nous rappelons que le jour du baccalauréat, **les méthodes de raisonnement ainsi que la qualité de la rédaction utilisées par le candidat entrent dans une part importante de l'évaluation** ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

`http://specialite-maths.fr/`

Table des matières

BAC S - THÈME 1

Suites et récurrence

1.1 Récurrence

Q 1 - Démontrer une conjecture [⋆]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Q 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme [⋆⋆]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée $(\star)$, valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

Q 3 - Une suite stationnaire [⋆⋆]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1$.

Q 4 - Récurrence sur une somme [⋆⋆⋆]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Q 5 - Comparaison entre n^2 et 2^n [⋆⋆⋆⋆]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier que l'on précisera, on a :

$$n^2 \leqslant 2^n$$

1.2 Suites géométriques

Q 6 - Suite géométrique et pourcentages [⋆]

Un étudiant paye un loyer mensuel de 400 euros pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%. On note u_n le loyer mensuel après n années, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1, c'est-à-dire le montant du loyer mensuel après une année.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Après 6 années, le montant du loyer mensuel a augmenté de :

☐ 42% ☐ 50% ☐ 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

Q 7 - Calcul du coût total d'un crédit [⋆⋆]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) la somme remboursée la n-ième année.

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$. En déduire u_{10}.

3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

Q 8 - Somme des termes d'une suite géométrique [⋆⋆]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000 + n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0{,}95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

Q 9 - Démontrer qu'une suite est géométrique [⋆⋆]

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) les suites définies par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1} \ , \ v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24 \ , \ w_n = \cos(n\pi) \ \text{ et } \ t_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

Q 10 - Détermination d'une raison [⋆⋆]

Les ventes d'un constructeur de voitures électriques sont de 3000 véhicules pour l'année 2017. L'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME) promet des aides aux constructeurs dont le volume des ventes aura triplé (au moins) d'ici 10 années. Le constructeur réalise donc un cahier des charges intégrant un pourcentage d'augmentation régulier de son activité afin d'atteindre en 2027 un volume de ventes de 9000 véhicules.

Pour cela on modélise le problème à l'aide d'une suite géométrique en posant u_n le nombre de véhicules, exprimé en milliers d'unités, que le constructeur prévoit de vendre pour l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3$.

1. Dans cette question, on suppose que le constructeur prévoit une augmentation de ses ventes de 8% par année. Préciser la valeur de la raison q correspondante et calculer u_{10}. Cela lui permettra-t-il d'atteindre son objectif en 2027 ?

2. Un informaticien conçoit un algorithme qui permet de déterminer une valeur de la raison q de la suite géométrique (u_n) permettant d'avoir $u_{10} \geqslant 9$. Pour cela, il teste toutes les raisons possibles à partir de $q = 1{,}08$ avec un pas de 0,01 jusqu'à obtention d'une raison convenable.
Compléter le tableau ci-dessous (des lignes supplémentaires peuvent être ajoutées) jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

3. À l'aide d'un calcul mathématique, déterminer la plus petite valeur possible de la raison q permettant d'atteindre cet objectif.

Algorithme en langage naturel

```
VARIABLES
u EST DU TYPE NOMBRE
q EST DU TYPE NOMBRE
pas EST DU TYPE NOMBRE
INITIALISATION
q ← 1.08
u ← 3 × q^10
ENTRER(pas)
DEBUT ALGORITHME
TANT_QUE u ⩽ 9
DEBUT_TANT_QUE
  q ← q + pas
  u ← 3 × q^10
FIN_TANT_QUE
AFFICHER q
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```python
def raison(pas) :
  q = 1.08              # initialisation de q
  u = 3*q**10           # calcul de u_10
  while u <= 9 :        # tant que u_10 est <= 9 faire :
    q = q + pas         # augmenter q du pas
    u = 3*q**10         # recalcul de u_10
  return q              # retourner q
```

Tableau à compléter (avec un pas de 0,01)

Étapes de l'algorithme	q	u
Initialisation	1.08	6.477
Étape 1		
Étape 2		
Étape 3		

Q 11 - Limite d'une suite géométrique

[★★]

Soient (u_n) et (v_n) les suites géométriques définies respectivement par :

$$u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$$

1. Préciser la limite de ces deux suites.

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$s_n = u_n + v_n$$

La suite (s_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$p_n = u_n \times v_n$$

La suite (p_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)

Q 12 - Suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ [★★]

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 3 - \frac{4}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. On souhaite disposer d'un algorithme permettant de calculer n'importe quel terme de cette suite, pour un entier n donné supérieur ou égal à 1. Compléter les lignes sur lesquelles apparaissent des points de suspension (...) afin d'arriver à cet objectif.

Algorithme (langage naturel)

```
VARIABLES
N EST DU TYPE NOMBRE
U EST DU TYPE NOMBRE
I EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
AFFICHER « Entrer la valeur de u(0) »
LIRE U
AFFICHER « Entrer la valeur de n (au moins 1) »
LIRE N
POUR I ALLANT DE 1 A ........
  DEBUT_POUR
    U ← ........
  FIN_POUR
AFFICHER U
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```
def suite(u,n) :
  if n == 0 :                    ♯ si n vaut 0 alors
    return u                     ♯ retourner u_0
  else :                         ♯ sinon
    for i in range(1,........) : ♯ pour i allant de 1 à ?
      u = ........               ♯ calculer la nouvelle valeur de u
    return u                     ♯ retourner u
```

Q 13 - Suite où u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n et de n [⋆⋆]

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 2n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Compléter, ci-dessous, l'algorithme permettant de calculer n'importe quel terme u_n de cette suite.

Que retourne cet algorithme pour $n = 10$?

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1$$

Cette suite (u_n) est-elle convergente ?

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 3^n + n$$

Retrouver ainsi la valeur de u_{10}.

Algorithme (langage naturel)

```
VARIABLES
N EST DU TYPE NOMBRE
U EST DU TYPE NOMBRE
I EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
U ← 1
AFFICHER « Entrer la valeur de n (au moins 1) »
LIRE N
POUR I ALLANT DE 1 A N
  DEBUT_POUR
    U ← ........
  FIN_POUR
AFFICHER U
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```
def suite(n) :
  if n == 0 :                  ♯ si n vaut 0 alors
    return 1                   ♯ retourner u_0
  else :                       ♯ sinon
  u=1                          ♯ initialisation
    for i in range(1,n+1) :    ♯ pour i allant de 1 à n
      u = ........             ♯ calculer la nouvelle valeur de u
    return u                   ♯ retourner u
```

Q 14 - Utilisation du théorème des gendarmes [⋆⋆⋆]

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \frac{3u_n^2}{4u_n+1} \end{cases}$$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$0 < u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

3. Que se passerait-il si on avait défini $u_0 = -1$ (au lieu de $u_0 = 1$) ?

1.4 Utiliser une suite auxiliaire

Q 15 - Suite arithmético-géométrique [⋆⋆]

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 5 \end{cases}$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{5}{2}$$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q que l'on précisera. Calculer son premier terme v_0.

2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Limites et asymptotes

2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Q 16 - Limites de fonctions polynômes et fonctions rationnelles - Asymptotes [⋆⋆]

Soient a un réel et f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 - 5x + 3 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = \frac{ax^2 - 2x + 1}{2x^2 + x + 11} \text{ pour } x \in \mathbb{R}\text{ [1]}$$

Étudier les limites de f et g en $+\infty$ selon les différentes valeurs de a.

Préciser également, selon les différentes valeurs de a, les équations des éventuelles asymptotes, en $+\infty$, aux courbes C_f et C_g des fonctions f et g.

2.2 Formes indéterminées

Q 17 - Formes indéterminées avec exponentielles et logarithmes - Asymptotes [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

1. Étudier les limites de f en 0 puis en $+\infty$.

2. Préciser les équations des éventuelles asymptotes à la courbe C_f de la fonction f.

Q 18 - Formes indéterminées avec exponentielles et logarithmes (bis) [⋆⋆]

Soient f et g les fonctions définies[2] par :

$$f(x) = \frac{2x}{x + e^x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\ln(x) - x^2}{x^2}$$

Étudier les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ ainsi que les limites de g en 0^+ et $+\infty$. Préciser les équations des éventuelles asymptotes aux courbes C_f de C_g des fonctions f et g.

1. la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur $2x^2 + x + 11$ ne s'annule jamais. En effet, le discriminant Δ du trinôme $2x^2 + x + 11$ est négatif ($\Delta = -87$).

2. On ne cherchera pas à déterminer le domaine de définition de f ! Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ où α est l'unique réel tel que $\alpha + e^\alpha = 0$. Il n'est pas difficile de montrer que $\alpha \in]-1\,,0[$ mais il n'est pas possible d'exprimer α à l'aide des fonctions usuelles.

2.3 Utilisation d'un théorème de comparaison

Q 19 - Utilisation du théorème des gendarmes [⋆⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

1. Étudier les variations de cette fonction f puis en déduire son signe.

2. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$$

3. En déduire la limite du cours suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

4. Soit x un réel supérieur ou égal à 3. On souhaite savoir à partir de quelle valeur de $x \geqslant 3$ la quantité $\frac{\ln(x)}{x}$ passe en dessous d'un seuil $\varepsilon > 0$ fixé.

Compléter l'algorithme ci-dessous pour parvenir à cet objectif.

Algorithme (langage naturel)

```
VARIABLES
X EST DU TYPE NOMBRE
S EST DU TYPE NOMBRE
P EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
AFFICHER « Entrer la valeur du seuil »
LIRE S
AFFICHER « Entrer la valeur du pas »
LIRE P
 TANT_QUE ........
   DEBUT_TANT_QUE
     X = X + P
   FIN_TANT_QUE
 AFFICHER X
 FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```
def abscisse_sous_seuil(seuil,pas) :
  x = 3                  ♯ initialisation de l'abscisse
  while ........ :       ♯ tant que ?
    x = x + pas          ♯ incrémenter l'abscisse du pas
  return x               ♯ retourner l'abscisse
```

Continuité et dérivabilité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection)

Q 20 - Solution d'une équation du type $f(x) = k$: existence et unicité [★★]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,,2]$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Q 21 - Algorithme de dichotomie [★★★]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x\,\ln(x) - 1$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,,2]$.

3. On considère l'algorithme de dichotomie ci-dessous.
On le fait fonctionner avec une précision de 0,1. Compléter le tableau ci-dessous et préciser à quelle étape il s'arrête. Préciser alors une valeur approchée de α à 10^{-1}.

Algorithme en langage naturel

```
VARIABLES
a, b, m, pre SONT DU TYPE NOMBRE
INITIALISATION
a ← 1
b ← 2
ENTRER(pre)
DEBUT ALGORITHME
TANT_QUE b-a > pre
DEBUT_TANT_QUE
  m ← (a+b)/2
  SI f(a)*f(m) <= 0
    DEBUT_SI
      b ← m
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
      a ← m
    FIN_SINON
FIN_TANT_QUE
AFFICHER m
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```
from math import *          ♯ importe la bibliothèque math
def f(x) :                  ♯ définition de f(x)
  return x*log(x)-1         ♯ le ln se note log
def dicho(a,b,pre) :
  while b-a > pre :         ♯ tant que b-a est > à la précision
    m = (a+b)/2             ♯ calcul du milieu de l'intervalle
    if f(a)*f(m) <= 0 :     ♯ si f(a) et f(m) sont de signes contraires
      b=m                   ♯ alors translate la borne b en m
    else :
      a=m                   ♯ sinon translate la borne a en m
  return m
```

Tableau à compléter (avec une précision de 0,1)

Étapes de l'algorithme	$[a\,,b]$	Milieu m	$f(a)f(m) < 0$?	Nouvel intervalle	Arrêt (condition $b-a > 0{,}1$) ?
Étape 1	$[1\,,2]$	1,5	NON	$[1{,}5\,,2]$	NON car $0{,}5 > 0{,}1$
Étape 2					
Étape 3					
Étape 4					

3.2 Étudier la dérivabilité d'une fonction

Q 22 - Étude de la dérivabilité d'une fonction en 0 [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

Étudier la dérivabilité de f en 0.

3.3 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction

Q 23 - Comparaison entre e^x et $x+1$ [⋆⋆]

Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$x+1 \leqslant \mathrm{e}^x$$

3.4 Problèmes nécessitant deux dérivations successives

Q 24 - Comparaison entre e^x et x^2+1 [⋆ ⋆ ⋆]

Démontrer que, pour tout réel x positif, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant x^2+1$$

3.5 Équation de la tangente

Q 25 - Tangente commune à deux courbes en un même point [⋆⋆]

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Calculer $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$. En déduire que les courbes C_f et C_g admettent un point commun A.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent la même tangente au point A.

Q 26 - Tangente commune à deux courbes en des points distincts [⋆⋆⋆⋆]

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $I =]0\,,2]$ par :

$$f(x) = x^2 \ \text{ et } \ g(x) = 4\ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2} - 1$$

Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle I.

En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β sur I. Donner la valeur exacte de β.

2. Soit $\alpha \in I$. Exprimer, en fonction de α, une équation de la tangente $T_{f\,,\alpha}$ à la courbe C_f au point d'abscisse α.

3. Faire de même pour la fonction g avec $\beta \in I$.

4. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent une tangente commune dont on précisera une équation.

3.6 Lectures graphiques

Q 27 - Lecture graphique de nombres dérivés [⋆]

Soient f et g les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous.

La droite T est tangente aux courbes C_f et C_g. La droite $T_{g\,,1}$ est tangente à C_g au point d'abscisse 1.

1. Lire graphiquement les abscisses des points d'intersection (visibles sur le graphique) entre C_f et C_g.

2. Lire graphiquement $f'(-1)$, $g'(3)$ et $g'(1)$.

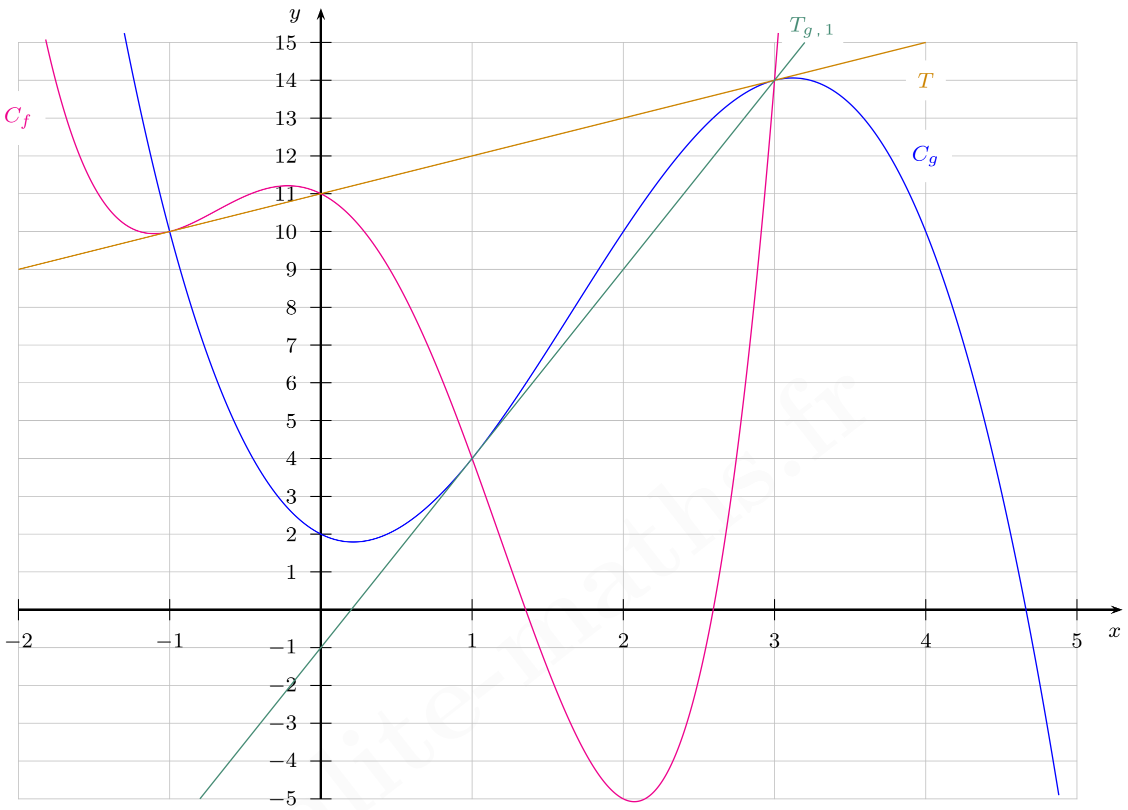
3. On donne :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

Retrouver les résultats des deux questions précédentes par calcul.

4. Tracer, sur le graphique, les droites $T_{f\,,0}$ et $T_{g\,,0}$, respectivement tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse 0. Ces droites sont-elles parallèles ?

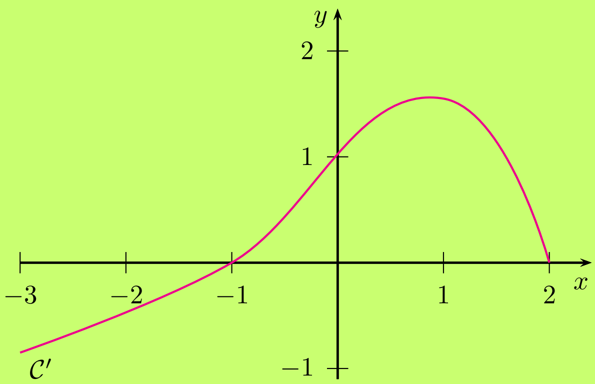
Représentation graphique :



Q 28 - VRAI ou FAUX à partir de la courbe de la dérivée [⋆⋆⋆]

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3\,,2]$ telle que $f(0) = -1$.

On donne, ci-dessous, la représentation graphique $\mathcal{C}'$ de la fonction dérivée f' de f :



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,,-1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,,2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,,2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,,0)$.

Q 29 - Détermination d'une fonction à partir d'informations graphiques [⋆⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f donnée ci-dessous. On sait que :

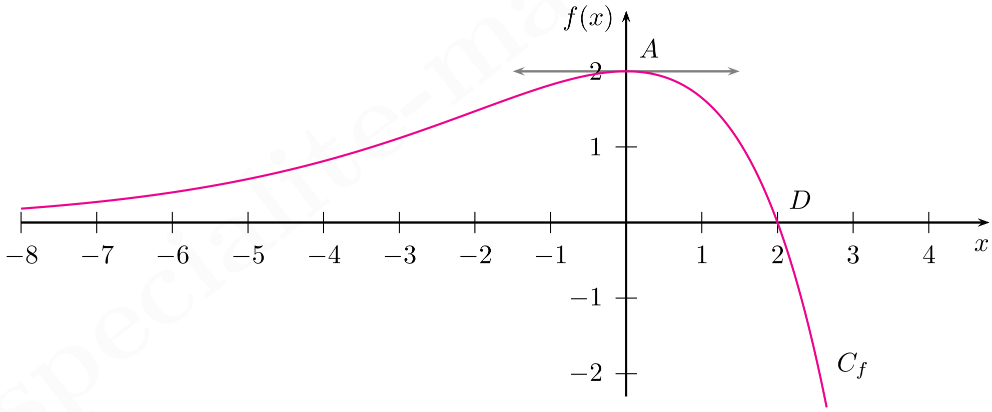
- les points $A(0\,,2)$ et $D(2\,,0)$ appartiennent à la courbe C_f ;
- la tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction des constantes a et b.

2. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

3. En déduire les valeurs des constantes a et b.

Représentation graphique de la fonction f :



Fonctions exponentielles et logarithmes

4.1 Résoudre une (in)équation

Q 30 - Résoudre une inéquation comportant une exponentielle [⋆⋆]

Un agriculteur cultive des tomates à partir de semis qu'il repique ensuite sous serre.

Après repiquage, la hauteur moyenne des plants au cours du temps est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{3}{2 + 22\mathrm{e}^{-0,12t}}$$

où t est le temps exprimé en jours à partir du repiquage et $h(t)$ la hauteur moyenne du plant en mètres.

1. Calculer $h(0)$. Quelle est la taille moyenne des semis repiqués ?

2. Calculer la limite de la fonction h lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter.

3. Au bout de combien de temps, la taille moyenne d'un plant dépassera-t-elle 1 mètre ?

Q 31 - Résoudre une (in)équation comportant des logarithmes [⋆⋆]

Dans chaque cas, préciser les contraintes (c'est-à-dire les nombres réels x pour lesquels l'(in)équation a un sens) puis résoudre :

1. $$2\ln(x-2) = \ln(8-x)$$

2. $$\ln(x-1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(2x-5)$$

4.2 Étude de fonctions

Q 32 - Étudier une fonction comportant un logarithme [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Dresser le tableau de variations (complet) de f.

Q 33 - Fonction avec paramètre [⋆⋆⋆]

Soit α un réel strictement positif. Soit f_α la fonction définie pour $x \in]0\,,+\infty[$ par :

$$f_\alpha(x) = x^2 - \alpha\ln(x)$$

Déterminer l'ensemble des valeurs du réel α pour lesquelles la fonction f_α est positive sur $]0\,,+\infty[$.

(On pourra étudier les variations de la fonction f_α.)

Q 34 - Utiliser une fonction auxiliaire [⋆⋆⋆]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.

2. Démontrer que, pour tout réel x non nul, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

3. En déduire le tableau de variation de f.

On pourra, pour cela, étudier la fonction auxiliaire φ définie pour tout réel x par :

$$\varphi(x) = e^x - 1 - xe^x$$

4.3 Avec des suites

Q 35 - Propriétés des logarithmes et suites [⋆⋆]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a :

$$0 < u_{n+1} < u_n$$

En déduire que la suite (u_n) converge.

Pour la suite de l'exercice, on pose $v_n = \ln\left(u_n\right) - 2$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme v_0.

3. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

4. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est égale à e^2.

BAC S - THÈME 5

Nombres complexes

5.1 Equations du second degré

Q 36 - Résolution d'équations du second degré [⋆]

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$z^2 = -16$$

$$9z^2 - 6z + 2 = 0$$

Q 37 - Résolution d'une équation à coefficients complexes [⋆⋆]

On considère l'équation (E) suivante, dont l'inconnue z est un nombre complexe :

$$(E) : z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(1+2\mathrm{i})z - 4\mathrm{i} = 0$$

1. Vérifier que le nombre complexe $z_0 = 2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

2. Déterminer trois nombres a, b et c tels que :

$$z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(1+2\mathrm{i})z - 4\mathrm{i} = (z - 2\mathrm{i})(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

5.2 Nombre complexe conjugué

Q 38 - Résolution d'une équation complexe avec conjugué [⋆]

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$2z + 6\overline{z} + 8 + 4\mathrm{i} = 0$$

Q 39 - Détermination d'un ensemble de points [⋆ ⋆ ⋆]

À tout nombre complexe z, on associe un nombre complexe Z défini par :

$$Z = 2z + 4\mathrm{i}\overline{z}$$

1. Calculer Z lorsque $z = 2 - 3\mathrm{i}$. Le résultat est-il un nombre réel ?

2. Calculer Z lorsque $z = 1 - 2\mathrm{i}$. Le résultat est-il un nombre réel ?

3. Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels Z est un réel.

5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe

Q 40 - VRAI ou FAUX avec justifications sur les nombres complexes [⋆⋆]

Soient Z et Z' des nombres complexes.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si Z est un nombre réel non nul, alors $\arg(Z) = 0\,[2\pi]$.

2. Si $Z = 1 + \mathrm{i}$ et $Z' = -\sqrt{2}$ alors $|Z| = |Z'|$.

3. Le nombre $4Z\overline{Z} + \left(Z - \overline{Z}\right)^2$ est toujours un réel positif.

4. Si $Z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$.

5. On a toujours $|Z + Z'|$ qui est égal à $|Z| + |Z'|$.

Q 41 - Utiliser l'écriture ad-hoc pour calculer avec des nombres complexes [⋆⋆]

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

L'écrire sous forme trigonométrique puis exponentielle.

2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $Z = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{11}$.

3. Déterminer l'argument principal de Z.

Q 42 - Calcul des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ [⋆ ⋆ ⋆]

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Déterminer la forme exponentielle et trigonométrique du produit $Z_1 Z_2$.

2. Déterminer la forme algébrique de Z_1 puis de Z_2. En déduire celle du produit $Z_1 Z_2$.

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Q 43 - Suite de nombres complexes [⋆⋆]

On considère la suite géométrique (Z_n) de nombres complexes de raison $1 + \mathrm{i}$ et de terme initial $Z_0 = 1$.

1. Exprimer Z_n en fonction de n.

2. Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$Z_{4n} = (-4)^n$$

4. Déterminer le module et l'argument principal de Z_{2019}.

5.4 Nombres complexes et géométrie

Q 44 - Nombres complexes et distances [⋆⋆⋆]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|z-1|=\sqrt{2}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$.

3. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que :

$$\left|(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}\right|=2$$

Le point O, origine du repère, appartient-il à cet ensemble ?

Q 45 - Nombres complexes et géométrie [⋆⋆]

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=-2+3\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=-3-\mathrm{i} \quad ; \quad z_C=2{,}08+1{,}98\mathrm{i}$$

1. Calculer le nombre complexe $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$, sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

$$|z+2-3\mathrm{i}|=|z+3+\mathrm{i}|$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$. Déterminer un réel k dont l'image K est élément de $\mathcal{E}$.

3. Le point D d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ est-il élément de $\mathcal{E}$?

4. Calculer l'aire du triangle ADB.

BAC S - THÈME 6

Géométrie dans l'espace

6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace

Q 46 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un vecteur normal et un point [⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(1\,,3\,,-2)$ et le vecteur :

$$\vec{n}\ \left|\ \begin{array}{c} 7 \\ -2 \\ 3 \end{array}\right.$$

Determiner une équation cartésienne du plan P passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{n}$.

Q 47 - Plans perpendiculaires [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le plan P_1 d'équation cartésienne :

$$P_1 : 7x - 2y + 3z + 5 = 0$$

1. Le point $B(1\,,2\,,1)$ appartient-il au plan P_1 ?

Déterminer un point C d'abscisse nulle appartenant au plan P_1.

2. Soit P_2 un plan de vecteur normal :

$$\vec{m}\ \left|\ \begin{array}{c} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{array}\right.$$

Déterminer ce vecteur normal de sorte que le plan P_2 soit perpendiculaire au plan P_1.

3. Sachant que le point B appartient au plan P_2, déterminer une équation cartésienne de ce plan P_2.

6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques

Q 48 - Déterminer un système d'équations paramétriques d'une droite [⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points A, B et C donnés par :

$$A(3\,,0\,,-4) \quad ; \quad B(1\,,-1\,,-3) \quad ; \quad C(-1\,,1\,,4)$$

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

2. Le point C est-il situé sur cette droite ?

Q 49 - Étudier l'intersection éventuelle de deux droites de l'espace [★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les deux droites D_1 et D_2 définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs suivants :

$$D_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-1 \\ y & = & 3t+2 \\ z & = & -t+6 \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t'+3 \\ y & = & 5t'+1 \\ z & = & 2t'-1 \end{array}\right. \quad \text{où } t'\in\mathbb{R}$$

Étudier si ces deux droites de l'espace sont sécantes et déterminer, le cas échéant, les coordonnées de leur point d'intersection.

Q 50 - Déterminer la droite d'intersection de deux plans sécants [★★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les deux plans P_1 et P_2 définis par les équations cartésiennes respectives suivantes :

$$P_1 : 2x+3y-z+5=0$$

$$P_2 : x-2y+4z-3=0$$

Justifier que ces deux plans sont sécants et déterminer un système d'équations paramétriques représentant leur droite d'intersection D.

Préciser un vecteur directeur de cette droite D.

6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques

Q 51 - Équation d'un plan passant par trois points [★★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points A, B et C donnés par :

$$A(3\,,0\,,-4) \quad ; \quad B(1\,,-1\,,-3) \quad ; \quad C(-1\,,1\,,4)$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par ces trois points.

6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence

Q 52 - Points d'intersection d'un plan avec les axes de coordonnées [★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le plan P défini par l'équation cartésienne suivante :

$$P : 3x+2y+4z-12=0$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels entre le plan P et les axes de coordonnées (Ox), (Oy) et (Oz).

Q 53 - VRAI ou FAUX avec justifications [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points A, B et C donnés par :

$$A\left(0\,,-\sqrt{2}\,,1\right) \quad ; \quad B\left(\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,,3\right) \quad ; \quad C(1\,,1\,,1)$$

Préciser si chacune des propositions suivantes est VRAIE (et dans ce cas la démontrer) ou FAUSSE (et dans ce cas, démontrer sa fausseté ou donner un contre-exemple).

1. L'équation cartésienne $y = 2x - \sqrt{2}$ est celle de la droite (AB).

2. Un vecteur directeur de la droite (AB) est :

$$\vec{d}\left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{array}\right.$$

3. La distance AB est égale à $2\sqrt{3}$.

4. Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$(\sqrt{2}+4)x - 2y - 2z = 0$$

Q 54 - Incidence entre deux droites dans un cube - Calcul d'angle [⋆ ⋆ ⋆]

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, de côté 1.

Le point T est le centre de la face $EFGH$.

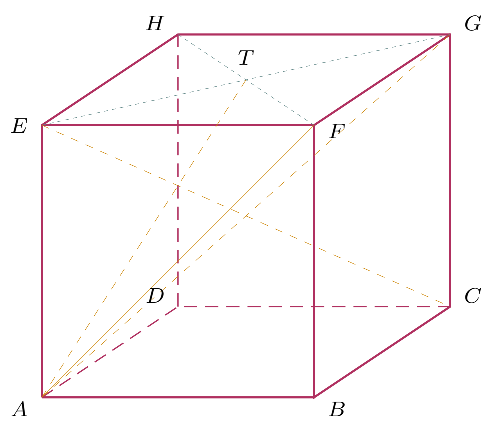
On pourra se placer dans le repère orthonormal $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Les droites (AT) et (EC) sont-elles orthogonales ? Et les droites (AF) et (EC) ?

2. Démontrer que les droites (AT) et (EC) sont sécantes.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection Z.

3. Déterminer, au degré près, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AG}\,,\overrightarrow{CE})$.



Q 55 - Incidence entre une droite et un plan dans un cube [⋆⋆⋆]

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, de côté 1.

Les points I, J, K et L sont respectivement le milieux des segments $[BC]$, $[FG]$, $[AE]$ et $[DH]$.

Le solide $IJKL$ s'appelle un *berlingot*.

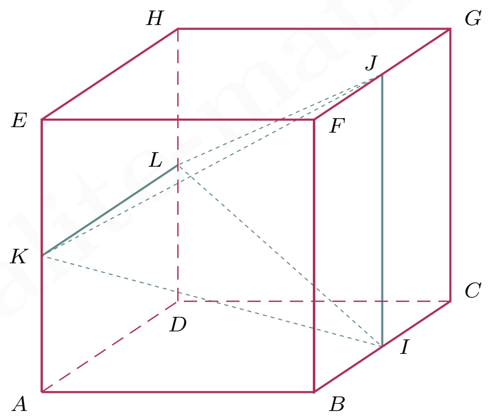
On pourra se placer dans le repère orthonormal $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (IKL).

2. Soit H le projeté orthogonal du point J sur le plan (IKL).
Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (JH).

3. En déduire les coordonnées du point H.

4. Calculer le volume du berlingot $IJKL$.



Calcul intégral

7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive

Q 56 - Cas où une primitive est suggérée par l'énoncé [⋆⋆]

Soit f la fonction logarithme népérien :

$$f(x) = \ln(x) \text{ pour } x \in]0\,,+\infty[$$

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$F(x) = x\ln(x) - x$$

est une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$.

2. En déduire les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_{1/2}^{2} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Q 57 - Utilisation d'une forme dont on connaît les primitives [⋆⋆]

Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Q 58 - Cas où l'on obtient une primitive par transformation d'écriture [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

2. En déduire l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\ln(1/2)}^{\ln(2)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

7.2 Calcul de l'aire d'un secteur

Q 59 - Calcul de l'aire d'un secteur [⋆]

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{2-x}$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives de ces deux fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$f(x) = g(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g.

2. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points $(x\,,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant g(x) & \text{lorsque} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

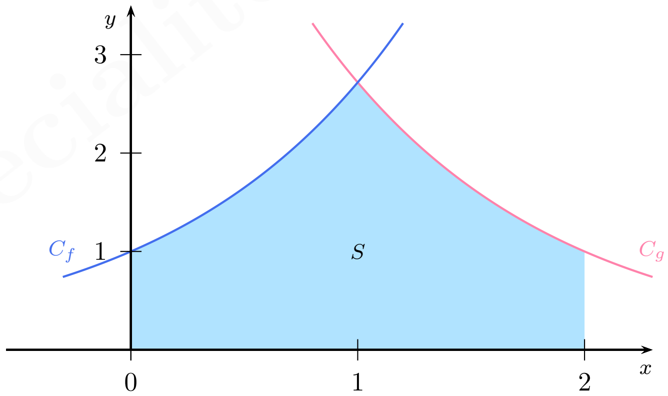


FIGURE 7.1 – Secteur S sous plusieurs courbes.

Q 60 - Calcul de l'aire d'un secteur (bis) [⋆⋆⋆]

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^x \quad ; \quad h(x) = \mathrm{e} \times x$$

On note C_f, C_g et D_h les représentations graphiques respectives de ces trois fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$g(x) \leqslant f(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g.

2. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$h(x) \leqslant f(x)$$

Démontrer, de plus, que la droite D_h est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

3. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points $(x\,,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} g(x) \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad x \leqslant 0 \\ h(x) \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

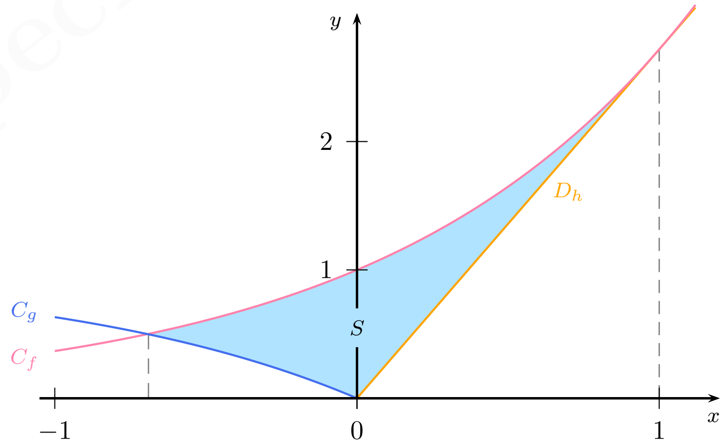


FIGURE 7.2 – Secteur S compris entre plusieurs courbes.

7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction

Q 61 - Calcul de la valeur moyenne d'une fonction [⋆⋆]

La hauteur d'une plante, au cours du temps, est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{2}{1 + 10\mathrm{e}^{-0,1t}}$$

où t est le temps exprimé en semaines ($0 \leqslant t \leqslant 300$) et $h(t)$ la hauteur de la plante exprimée en mètres.

Les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près.

1. Calculer la hauteur de la plante après 30 semaines, puis après 60 semaines.

2. Démontrer que, pour tout $t \in [0\,,300]$, on a :

$$h(t) = 20 \times \frac{0{,}1\mathrm{e}^{0,1t}}{\mathrm{e}^{0,1t} + 10}$$

En déduire une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0\,,300]$.

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[30\,,60]$.

Interpréter le résultat.

7.4 Intégrales et suites

Q 62 - Étude d'une suite définie par une intégrale [⋆]

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \text{ et } u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer u_0.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Q 63 - Étude d'une suite définie par une intégrale (bis) [⋆⋆⋆]

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + x + x^n} \,\mathrm{d}x \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Calculer $\ln(2) - u_n$ en écrivant $\ln(2)$ sous la forme d'une intégrale.

En déduire la limite de la suite (u_n).

Probabilités conditionnelles - Indépendance

8.1 Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales

Q 64 - Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales [⋆⋆]

Un élève de terminale est dans une série où le taux de réussite au baccalauréat est de 80%.

Après son année de terminale, qu'il ait eut son bac ou non, il passe un concours d'admission à une école dont les taux d'admissions sont les suivants :

- parmi les candidats bacheliers qui présentent ce concours, 60% sont admis dans cette école ;
- parmi les candidats non bacheliers qui présentent ce concours, 30% sont admis dans cette école.

1. Calculer la probabilité que l'élève ait sont bac et soit admis dans l'école.

2. Calculer la probabilité que l'élève soit admis dans l'école.

3. Sachant que l'élève a été admis à l'école, quelle est la probabilité qu'il ait eut son bac ?

8.2 Indépendance d'événements

Q 65 - Indépendance d'événements [⋆⋆]

On lance deux dés à 6 faces, non truqués, et donc les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note A, B et C les événements suivants :

A : « la somme obtenue est un nombre premier »

B : « les deux dés affichent le même résultat »

C : « la somme obtenue est un multiple de 3 »

1. Calculer les probabilités de A, B et C.

2. Parmi les trois événements précédents, deux sont indépendants entre-eux ; lesquels ?

Q 66 - Indépendance des événements contraires [⋆⋆]

1. Soient A et B deux événements indépendants.
Démontrer que A et $\overline{B}$ sont également indépendants.
Démontrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

2. Une entreprise fabrique des tiges cylindriques. La probabilité de l'événement L : « la tige est conforme pour la longueur » est $\mathbb{P}(L) = 0{,}97$. On note D l'événement : « la tige est conforme pour le diamètre ». On suppose que L et D sont indépendants et on sait que $\mathbb{P}\left(\overline{L} \cup \overline{D}\right) = 0{,}12$. On prélève une tige au hasard. Calculer la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre.

8.3 Probabilités et suites

Q 67 - Probabilités conditionnelles et suites [⋆⋆]

Un archer étudie ses statistiques de réussite lors de séances de tirs à l'arc. Il remarque que lors d'une série :

- il possède 70% de chance de réussir le premier tir ;
- s'il réussit un tir, alors il gagne en confiance et possède 80% de chance de réussir le suivant ;
- s'il rate un tir, alors il perd confiance et ne possède plus que 60% de chance de réussir le suivant.

On note p_n la probabilité que l'archer réussisse le $n-$ième tir de la série.

1. À l'aide d'un arbre illustrant la transition entre $n-$ième et le $(n+1)-$ième tir, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$$

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = p_n - 0{,}75$$

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison q ainsi que son premier terme u_1.

3. Exprimer u_n, puis p_n, en fonction de n.

4. Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter.

BAC S - THÈME 9

Lois de probabilités

9.1 Lois discrètes

9.1.1 Lois discrètes quelconques

Q 68 - Calcul d'espérance [⋆⋆]

Dans cet exercice, n est un entier vérifiant $n \geqslant 4$. On place n jetons dans une urne : un jaune et des blancs. À chaque fois que l'on choisit, au hasard, un jeton de l'urne on note :

$$J = \text{« le jeton obtenu est jaune »}$$

$$B = \text{« le jeton obtenu est blanc »}$$

On considère le jeu suivant : on choisit successivement deux jetons, avec remise. On gagne 16 euros si l'on obtient deux fois le jeton jaune ; on gagne 1 euros si l'on obtient deux fois un jeton blanc et on perd 5 euros sinon. On note X le gain algébrique en euros $(+16\,;\,+1$ ou $-5)$.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 16)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = -5)$ en fonction de n.

3. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.
Combien de jetons faut-il mettre au total dans l'urne pour que ce jeu soit équitable ?

9.1.2 Lois binomiales

Q 69 - Calculs avec la loi binomiale [⋆⋆]

Un archer possède 40% de chance d'atteindre une cible. Il effectue 15 tirs successivement.
On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'il en réussisse exactement 10.

2. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au plus 6.

3. Calculer la probabilité qu'il en réussisse entre 8 et 12.

4. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au moins 6.

5. Combien de tirs peut-il espérer réussir ?

On donnera les résultats des probabilités à 10^{-4} près.

Q 70 - Étude d'une inéquation du type $a^n \leqslant b$ par algorithme et par calcul [★★]

On lance plusieurs fois de suite un dé (à 6 faces et bien équilibré).

On note n le nombre de lancers ($n \geqslant 2$) et X le nombre de 6 obtenus.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers) est :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2. Un informaticien conçoit l'algorithme suivant :

Algorithme en langage naturel

Déclarations	R est un réel
	n est un entier
Entrée	SAISIR le nombre R, compris entre 0 et 1
Initialisation	$n \leftarrow 0$
Traitement	TANT_QUE 1 - (5/6)^n < R
	DEBUT_TANT_QUE
	$n \leftarrow n + 1$
	FIN_TANT_QUE
Sortie	AFFICHER le nombre n

Algorithme en Python

```
def nb_de_lancers(R) :
  n = 0
  while 1 - (5/6)**n < R :
    n = n + 1
  return n
```

Compléter le tableau suivant dans le cas où l'utilisateur rentre la valeur $R = 0{,}5$ dans l'algorithme ci-dessus :

Valeur de n	0	1	2				
Valeur de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	0						
Condition $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n < R$	Vrai						

Quelle valeur de n est affichée en sortie ?

Les résultats numériques de cette question seront arrondis à 10^{-4} près.

3. À l'aide de l'algorithme précédent, préciser combien de fois il faudrait lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 50%.

4. Retrouver le résultat précédent en résolvant, par un calcul rigoureux, l'inéquation $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}5$.

9.2 Lois à densité

9.2.1 Lois uniformes

Q 71 - Calculs directs et réciproques avec la loi uniforme [⋆⋆]

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

Lorsqu'il se connecte sur le site, la durée nécessaire pour que les quatre amis soient réunis est une variable aléatoire D, exprimée en secondes.

On admet que cette variable aléatoire D suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\,,120]$.

1. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps inférieur à une minute.

2. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps compris entre 60 et 90 secondes.

3. Un des amis remarque que dans 10% des cas, ils se retrouvent tous réunis en moins d'un certain temps t.
Calculer ce temps t.

4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D.
Interpréter le résultat.

9.2.2 Lois normales

Q 72 - Lectures graphiques [⋆]

La vitesse (en km/h) des véhicules passant sur une route à un certain radar est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 58$ km/h.

On dispose de l'information donnée sur le graphique ci-dessous, à savoir $\mathbb{P}(X \leqslant 65) = 0{,}72$.

Déterminer, en justifiant :

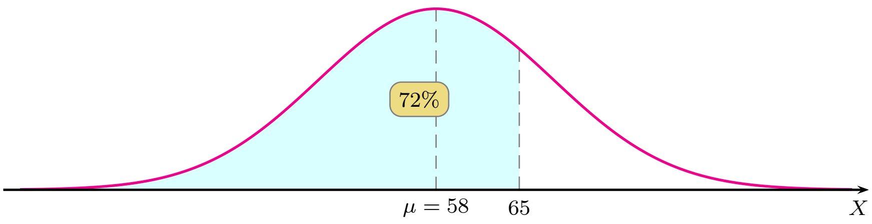
1. $\mathbb{P}(X \geqslant 65)$.

2. $\mathbb{P}(58 \leqslant X \leqslant 65)$.

3. $\mathbb{P}(51 \leqslant X \leqslant 65)$.

4. $\mathbb{P}(X \geqslant 51)$.

5. $\mathbb{P}(X = 65)$.



Q 73 - Calculs directs et réciproques avec la loi normale [★★]

Dans une population, on étudie la taille des individus.

La moyenne des individus est $\mu = 1{,}76$ m. L'écart-type est $\sigma = 0{,}10$ m.

On choisit un individu au hasard et on note X sa taille.

On admet que cette variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}$ de moyenne μ et d'écart-type σ. On notera [1] $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Calculer la probabilité que cet individu mesure moins de 1,80 m.

2. Calculer la probabilité que cet individu mesure entre 1,70 m et 1,80 m.

3. Calculer la probabilité que cet individu mesure plus de 2 m.

4. On sait que cet individu est tel que 75% des personnes de la population sont plus petites que lui. Quelle taille mesure cet individu ?

On arrondira les calculs numériques à 10^{-4} près.

http://specialite-maths.fr

Q 74 - Intervalles de centre μ et de rayon $k\sigma$ [★★]

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

1. Via un centrage et une réduction, retrouver les valeurs des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$$

On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

2. Application : on suppose dans cette question que $\mu = 100$ (σ est inconnu). On donne $\mathbb{P}(X \geqslant 108) \approx 0{,}023$. En déduire une valeur approchée de $\mathbb{P}(X \leqslant 96)$ à 10^{-3} près.

http://specialite-maths.fr

Q 75 - Détermination d'un écart-type [★★★]

Une entreprise industrielle fabrique des pièces dont la longueur X doit satisfaire certaines contraintes.

On admet que cette longueur X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 65$ mm et d'écart-type σ. Le service qualité considère une pièce conforme lorsque $64 \leqslant X \leqslant 66$.

Le cahier des charges est tel que l'entreprise souhaite obtenir au minimum 92% de pièces conformes.

1. Sur la machine utilisée par l'entreprise, le réglage optimal permet d'avoir un écart-type $\sigma = 0{,}7$.
Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme si la production est faite sur cette machine. Les exigences du cahier des charges sont-elles atteintes ?

2. L'entreprise envisage l'achat d'une nouvelle machine plus performante. Mais plusieurs choix de machines sont proposées au catalogue avec, pour chacune d'entre-elles, des valeurs de σ différentes. Calculer la valeur maximale de σ que doit posséder une machine afin qu'elle produise au minimum 92% de pièces conformes.

1. certains auteurs ou ouvrages notent $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Q 76 - Détermination d'un intervalle centré de probabilité donnée [⋆⋆⋆⋆]

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,1)$.

On note Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ où } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

On rappelle que :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$$

1. Soit k un réel vérifiant $0{,}5 \leqslant k < 1$.
Démontrer que l'équation $\Phi(x) = k$ admet une unique solution u dans $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire que, pour tout réel α tel que $0 < \alpha \leqslant 1$, l'équation $\mathbb{P}\big(-x \leqslant Z \leqslant x\big) = 1-\alpha$, d'inconnue x, admet une unique solution u_α dans $\mathbb{R}_+$.

3. Préciser $u_{0{,}50}$ et $u_{0{,}05}$. Interpréter et illustrer.

4. Application : dans un pays, la taille des individus suit une loi normale de moyenne 174 cm et d'écart-type 15 cm. Les institutions de santé de ce pays souhaitent attribuer une allocation aux 4% des individus qui sont trop éloignés de cette moyenne (plus précisément aux 2% qui sont trop « petits » ainsi qu'aux 2% qui sont trop « grands »). Quelles bornes sur la taille ces institutions doivent-elles fixer pour obtenir ces proportions ?

Q 77 - Approximation de la loi binomiale par la loi normale [⋆⋆⋆⋆]

On lance 100 fois une pièce monnaie (bien équilibrée).

On note X le nombre de fois où l'on obtient le côté PILE ($0 \leqslant X \leqslant 100$).

Les calculs numériques seront arrondis à 10^{-4} près.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$ dont on précisera les paramètres n et p.
Calculer son espérance μ et son écart-type σ.

2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 50 fois le côté PILE.
Calculer la probabilité d'obtenir entre 40 et 60 fois le côté PILE.

3. Vérifier que les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont satisfaites.
On approche la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$ précédente par une variable aléatoire X' qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$ [2].
Recalculer les probabilités demandées à la question **2** dans ce nouveau contexte.
L'approximation est-elle pertinente ?

4. Afin de minimiser l'erreur obtenue dans l'approximation de la binomiale par la loi normale, certains statisticiens effectuent une « correction de continuité ». Cela consiste à calculer $\mathbb{P}(49{,}5 \leqslant X' \leqslant 50{,}5)$ avec la loi normale lorsqu'on cherche à approximer $\mathbb{P}(X = 50)$. De même, on calculera $\mathbb{P}(39{,}5 \leqslant X' \leqslant 60{,}5)$ pour approcher $\mathbb{P}(40 \leqslant X \leqslant 60)$. Cette correction de continuité améliore-t-elle l'approximation faite lorsqu'on remplace la loi binomiale par la loi normale ?

2. certains auteurs ou ouvrages notent $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu\,,\sigma^2\right)$. Mais dans tous les cas, il s'agit de la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

9.2.3 Lois exponentielles

Q 78 - Calculs avec la loi exponentielle [⋆⋆]

Une entreprise fabrique des robots. Le service qualité étudie leur fiabilité. On note T le temps (exprimé en année) au bout duquel survient la première panne d'un de ces robots. On admet que T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Les probabilités seront données à 10^{-2} près.

1. Interpréter par une phrase la condition $\mathbb{P}(T > 6) = 0{,}30$.
Déterminer la valeur de λ, à 10^{-2} près, pour que cette condition soit satisfaite.
Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}20$.

2. Calculer la probabilité qu'un robot fonctionne au moins deux années sans avoir de pannes.

3. Calculer la probabilité que la première panne survienne après trois ans et avant cinq ans.

4. L'entreprise souhaite communiquer un slogan publicitaire du type « 75% de nos robots fonctionnent x mois sans la moindre panne ». Déterminer cette durée x (au mois près) qu'il faut annoncer dans le slogan.

5. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore durant 4 ans supplémentaires (au moins) sans la moindre panne ?

Intervalles de fluctuation et de confiance

Q 79 - Intervalle de fluctuation - Règle de décision [$\star\star$]

Une élection a eu lieu et un candidat, Monsieur G. GANIET, est élu avec 72% des suffrages exprimés.

Suspicieux ou mauvais perdant, un autre candidat, Monsieur D. MAULI, demande un recomptage des voix dans deux bureaux de vote :

- dans le bureau n° 1, 500 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 75% des suffrages ;
- dans le bureau n° 2, 1000 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 79% des suffrages.

1. Sachant que sur l'ensemble des suffrages exprimés, le candidat G. GANIET a obtenu un score de 72%, calculer un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95%, de la fréquence des voix en sa faveur pour un échantillon de taille $n = 500$.

Peut-on considérer que le score de 75% dans le bureau de vote n° 1 est significativement éloigné du score de référence de 72% au point d'affirmer (avec un niveau de confiance de 95%) qu'il y a eu une fraude dans ce bureau de vote ?

2. Même question avec le bureau de vote n° 2 (on calculera un intervalle de fluctuation asymptotique pour un échantillon de taille $n = 1000$).

Q 80 - Intervalle de confiance - Détermination de la taille d'un échantillon [$\star\star$]

À l'approche d'une élection, un institut effectue un sondage auprès d'un échantillon de 1000 personnes en leur demandant si elles sont prêtes à voter pour le candidat Monsieur J. KHROA. À l'issue de ce sondage, il s'avère que 52% des personnes interrogées se disent prêtes à voter pour ce candidat.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion des électeurs prêts à voter pour Monsieur J. KHROA.

2. Quelle est l'amplitude, en points, de cet intervalle ?

3. On voudrait désormais avoir un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, ayant une amplitude de 2 points seulement. Calculer la taille de l'échantillon des personnes à interroger pour parvenir à cet objectif.

Découvrez les corrigés détaillés ainsi que des rappels de cours sur notre site :

http://specialite-maths.fr/

Index