

112 questions « type-bac » 2020

Série S - Mathématiques

Enseignement obligatoire ET de **spécialité**

Énoncés seuls

⚠ Téléchargez nos documents complets **avec corrigés** afin d'optimiser votre préparation au baccalauréat !
Vous ferez le bon choix ! Vous progresserez en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité !
Gain possible sur votre note de bac si vous travaillez avec les corrigés : 5 à 10 points sur votre note !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;
3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles ;
4. nous rappelons que le jour du baccalauréat, **les méthodes de raisonnement ainsi que la qualité de la rédaction utilisées par le candidat entrent dans une part importante de l'évaluation** ;
5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

<http://specialite-maths.fr/>

Table des matières

1 Suites et récurrence	4
1.1 Récurrence	4
1.2 Suites géométriques	5
1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)	8
1.4 Utiliser une suite auxiliaire	10
2 Limites et asymptotes	11
2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	11
2.2 Formes indéterminées	11
2.3 Utilisation d'un théorème de comparaison	12
3 Continuité et dérivabilité	13
3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection)	13
3.2 Étudier la dérivabilité d'une fonction	14
3.3 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction	14
3.4 Problèmes nécessitant deux dérivations successives	14
3.5 Équation de la tangente	14
3.6 Lectures graphiques	15
4 Fonctions exponentielles et logarithmes	18
4.1 Résoudre une (in)équation	18
4.2 Étude de fonctions	18
4.3 Avec des suites	19
5 Nombres complexes	20
5.1 Equations du second degré	20
5.2 Nombre complexe conjugué	20
5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe	21
5.4 Nombres complexes et géométrie	22
6 Géométrie dans l'espace	23
6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace	23
6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques	23
6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques	24
6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence	25
7 Calcul intégral	27
7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive	27
7.2 Calcul de l'aire d'un secteur	28
7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction	30
7.4 Intégrales et suites	30

8	Probabilités conditionnelles - Indépendance	31
8.1	Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales	31
8.2	Indépendance d'événements	31
8.3	Probabilités et suites	32
9	Arithmétique	33
9.1	Divisibilité - Division euclidienne	33
9.2	Entiers premiers entre-eux	35
9.3	Congruences	37
9.4	Nombres premiers	38
10	Matrices et suites matricielles	40
10.1	Calculs algébriques sur les matrices	40
10.2	Suites de matrices	41
10.3	Graphes probabilistes	42
11	Lois de probabilités	43
11.1	Lois discrètes	43
11.1.1	Lois discrètes quelconques	43
11.1.2	Lois binomiales	43
11.2	Lois à densité	45
11.2.1	Lois uniformes	45
11.2.2	Lois normales	45
11.2.3	Lois exponentielles	48
12	Intervalles de fluctuation et de confiance	49
	Index	51

Suites et récurrence

1.1 Récurrence

Q 1 - Démontrer une conjecture

[*]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

<http://specialite-maths.fr>

Q 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme

[**]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée (\star) , valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln(A^2) = 2 \ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(A^n) = n \ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln(\sqrt{A}) = \frac{1}{2} \ln(A)$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 3 - Une suite stationnaire

[**]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1$.

<http://specialite-maths.fr>

Q 4 - Récurrence sur une somme

[***]

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 5 - Comparaison entre n^2 et 2^n

[***]

Démontrer que, pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier que l'on précisera, on a :

$$n^2 \leq 2^n$$

<http://specialite-maths.fr>**1.2 Suites géométriques****Q 6 - Suite géométrique et pourcentages**

[*]

Un étudiant paye un loyer mensuel de 400 euros pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%. On note u_n le loyer mensuel après n années, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1 , c'est-à-dire le montant du loyer mensuel après une année.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Après 6 années, le montant du loyer mensuel a augmenté de :

 42% 50% 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

<http://specialite-maths.fr>**Q 7 - Calcul du coût total d'un crédit**

[**]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leq n \leq 10$) la somme remboursée la n -ième année.

1. Calculer u_2 , c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.
2. Exprimer u_n en fonction de n , pour $1 \leq n \leq 10$. En déduire u_{10} .
3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 8 - Somme des termes d'une suite géométrique

[★★]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000 + n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0,95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)
3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.
4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

<http://specialite-maths.fr>**Q 9 - Démontrer qu'une suite est géométrique**

[★★]

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) les suites définies par :

$$u_n = e^{2n+1}, \quad v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24, \quad w_n = \cos(n\pi) \quad \text{et} \quad t_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

<http://specialite-maths.fr>**Q 10 - Détermination d'une raison**

[★★]

Les ventes d'un constructeur de voitures électriques sont de 3000 véhicules pour l'année 2017. L'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME) promet des aides aux constructeurs dont le volume des ventes aura triplé (au moins) d'ici 10 années. Le constructeur réalise donc un cahier des charges intégrant un pourcentage d'augmentation régulier de son activité afin d'atteindre en 2027 un volume de ventes de 9000 véhicules.

Pour cela on modélise le problème à l'aide d'une suite géométrique en posant u_n le nombre de véhicules, exprimé en milliers d'unités, que le constructeur prévoit de vendre pour l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3$.

1. Dans cette question, on suppose que le constructeur prévoit une augmentation de ses ventes de 8% par année. Préciser la valeur de la raison q correspondante et calculer u_{10} . Cela lui permettra-t-il d'atteindre son objectif en 2027 ?
2. Un informaticien conçoit un algorithme qui permet de déterminer une valeur de la raison q de la suite géométrique (u_n) permettant d'avoir $u_{10} \geq 9$. Pour cela, il teste toutes les raisons possibles à partir de $q = 1,08$ avec un pas de 0,01 jusqu'à obtention d'une raison convenable.
Compléter le tableau ci-dessous (des lignes supplémentaires peuvent être ajoutées) jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.
3. À l'aide d'un calcul mathématique, déterminer la plus petite valeur possible de la raison q permettant d'atteindre cet objectif.

<http://specialite-maths.fr>

Algorithme en langage naturel

```

1.  VARIABLES
2.  u EST DU TYPE NOMBRE
3.  q EST DU TYPE NOMBRE
4.  pas EST DU TYPE NOMBRE
5.  INITIALISATION
6.  q ← 1.08
7.  u ← 3 × q10
8.  ENTRER(pas)
9.  DEBUT ALGORITHME
10. TANT_QUE u ≤ 9
11. DEBUT_TANT_QUE
12.   q ← q + pas
13.   u ← 3 × q10
14. FIN_TANT_QUE
15. AFFICHER q
16. FIN ALGORITHME

```

Algorithme en Python

```

def raison(pas) :
    q = 1.08           # initialisation de q
    u = 3*q**10       # calcul de u_10
    while u <= 9 :    # tant que u_10 est <= 9 faire :
        q = q + pas   # augmenter q du pas
        u = 3*q**10   # recalcul de u_10
    return q          # retourner q

```

Tableau à compléter (avec un pas de 0,01)

Étapes de l'algorithme	q	u
Initialisation	1.08	6.477
Étape 1		
Étape 2		
Étape 3		

Q 11 - Limite d'une suite géométrique

[**]

Soient (u_n) et (v_n) les suites géométriques définies respectivement par :

$$u_n = (\sqrt{2})^n \text{ et } v_n = (1 - \sqrt{2})^n$$

1. Préciser la limite de ces deux suites.
2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$s_n = u_n + v_n$$

La suite (s_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$p_n = u_n \times v_n$$

La suite (p_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)

Q 12 - Suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

[★★]

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 3 - \frac{4}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On souhaite disposer d'un algorithme permettant de calculer n'importe quel terme de cette suite, pour un entier n donné supérieur ou égal à 1. Compléter les lignes sur lesquelles apparaissent des points de suspension (...) afin d'arriver à cet objectif.

<http://specialite-maths.fr>

Algorithme (langage naturel)

1. **VARIABLES**
2. N EST DU TYPE NOMBRE
3. U EST DU TYPE NOMBRE
4. I EST DU TYPE NOMBRE
5. **DEBUT ALGORITHME**
6. AFFICHER « Entrer la valeur de u(0) »
7. LIRE U
8. AFFICHER « Entrer la valeur de n (au moins 1) »
9. LIRE N
10. POUR I ALLANT DE 1 A
11. DEBUT_POUR
12. U ←
13. FIN_POUR
14. AFFICHER U
15. **FIN ALGORITHME**

Algorithme en Python

```
def suite(u,n) :
    if n == 0 :                # si n vaut 0 alors
        return u              # retourner u_0
    else :                     # sinon
        for i in range(1,.....) : # pour i allant de 1 à ?
            u = .....          # calculer la nouvelle valeur de u
        return u              # retourner u
```

Q 13 - Suite où u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n et de n

[★★]

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 2n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer
- u_1
- ,
- u_2
- et
- u_3
- .

Compléter, ci-dessous, l'algorithme permettant de calculer n'importe quel terme u_n de cette suite.Que retourne cet algorithme pour $n = 10$?

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel
- n
- , on a :

$$u_n \geq n + 1$$

Cette suite (u_n) est-elle convergente?

3. Démontrer que la suite
- (u_n)
- est croissante.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel
- n
- , on a :

$$u_n = 3^n + n$$

Retrouver ainsi la valeur de u_{10} .<http://specialite-maths.fr>

Algorithme (langage naturel)

1. **VARIABLES**
2. N EST DU TYPE NOMBRE
3. U EST DU TYPE NOMBRE
4. I EST DU TYPE NOMBRE
5. **DEBUT ALGORITHME**
6. $U \leftarrow 1$
7. AFFICHER « Entrer la valeur de n (au moins 1) »
8. LIRE N
9. POUR I ALLANT DE 1 A N
10. DEBUT_POUR
11. $U \leftarrow \dots\dots$
12. FIN_POUR
13. AFFICHER U
14. **FIN ALGORITHME**

Algorithme en Python

```
def suite(n) :
    if n == 0 :                # si n vaut 0 alors
        return 1              # retourner u_0
    else :                    # sinon
        u=1                    # initialisation
        for i in range(1,n+1) : # pour i allant de 1 à n
            u = .....         # calculer la nouvelle valeur de u
        return u              # retourner u
```

Q 14 - Utilisation du théorème des gendarmes

[★★★]

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n^2}{4u_n+1} \end{cases}$$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel
- n
- :

$$0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

2. En déduire que la suite
- (u_n)
- converge vers 0.

3. Que se passerait-il si on avait défini
- $u_0 = -1$
- (au lieu de
- $u_0 = 1$
-) ?

<http://specialite-maths.fr>

1.4 Utiliser une suite auxiliaire**Q 15 - Suite arithmético-géométrique**

[★★]

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 5 \end{cases}$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{5}{2}$$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q que l'on précisera. Calculer son premier terme v_0 .

2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

<http://specialite-maths.fr>

Limites et asymptotes

2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Q 16 - Limites de fonctions polynômes et fonctions rationnelles - Asymptotes [★★]

Soient a un réel et f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 - 5x + 3 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = \frac{ax^2 - 2x + 1}{2x^2 + x + 11} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Étudier les limites de f et g en $+\infty$ selon les différentes valeurs de a .

Préciser également, selon les différentes valeurs de a , les équations des éventuelles asymptotes, en $+\infty$, aux courbes C_f et C_g des fonctions f et g .

<http://specialite-maths.fr>

2.2 Formes indéterminées

Q 17 - Formes indéterminées avec exponentielles et logarithmes - Asymptotes [★★]

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

- Étudier les limites de f en 0 puis en $+\infty$.
- Préciser les équations des éventuelles asymptotes à la courbe C_f de la fonction f .

<http://specialite-maths.fr>

Q 18 - Formes indéterminées avec exponentielles et logarithmes (bis) [★★]

Soient f et g les fonctions définies ⁽²⁾ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x + e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln(x) - x^2}{x^2}$$

Étudier les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ ainsi que les limites de g en 0^+ et $+\infty$. Préciser les équations des éventuelles asymptotes aux courbes C_f de C_g des fonctions f et g .

<http://specialite-maths.fr>

1. la fonction g est bien définie sur \mathbb{R} car le dénominateur $2x^2 + x + 11$ ne s'annule jamais. En effet, le discriminant Δ du trinôme $2x^2 + x + 11$ est négatif ($\Delta = -87$).

2. On ne cherchera pas à déterminer le domaine de définition de f ! Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ où α est l'unique réel tel que $\alpha + e^\alpha = 0$. Il n'est pas difficile de montrer que $\alpha \in]-1, 0[$ mais il n'est pas possible d'exprimer α à l'aide des fonctions usuelles.

2.3 Utilisation d'un théorème de comparaison

Q 19 - Utilisation du théorème des gendarmes

[***]

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

1. Étudier les variations de cette fonction f puis en déduire son signe.
2. En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a :

$$0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

3. En déduire la limite du cours suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
4. Soit x un réel supérieur ou égal à 3. On souhaite savoir à partir de quelle valeur de $x \geq 3$ la quantité $\frac{\ln(x)}{x}$ passe en dessous d'un seuil $\varepsilon > 0$ fixé.

Compléter l'algorithme ci-dessous pour parvenir à cet objectif.

<http://specialite-maths.fr>

Algorithme (langage naturel)

1. **VARIABLES**
2. X EST DU TYPE NOMBRE
3. S EST DU TYPE NOMBRE
4. P EST DU TYPE NOMBRE
5. **DEBUT ALGORITHME**
6. AFFICHER « Entrer la valeur du seuil »
7. LIRE S
8. AFFICHER « Entrer la valeur du pas »
9. LIRE P
10. TANT_QUE
11. DEBUT_TANT_QUE
12. X = X + P
13. FIN_TANT_QUE
14. AFFICHER X
15. **FIN ALGORITHME**

Algorithme en Python

```
def abscisse_sous_seuil(seuil,pas) :
    x = 3                                # initialisation de l'abscisse
    while ..... :                       # tant que ?
        x = x + pas                      # incrémenter l'abscisse du pas
    return x                             # retourner l'abscisse
```

Continuité et dérivabilité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection)

Q 20 - Solution d'une équation du type $f(x) = k$: existence et unicité

[**]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1, 2]$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

<http://specialite-maths.fr>

Q 21 - Algorithme de dichotomie

[***]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = x \ln(x) - 1$$

- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1, 2]$.
- On considère l'algorithme de dichotomie ci-dessous.

On le fait fonctionner avec une précision de 0,1. Compléter le tableau ci-dessous et préciser à quelle étape il s'arrête. Préciser alors une valeur approchée de α à 10^{-1} .

<http://specialite-maths.fr>

Algorithme en langage naturel

- VARIABLES**
- a, b, m, pre SONT DU TYPE NOMBRE
- INITIALISATION**
- a ← 1
- b ← 2
- ENTRER(pre)
- DEBUT ALGORITHME**
- TANT_QUE b-a > pre
- DEBUT_TANT_QUE
- m ← (a+b)/2
- SI f(a)*f(m) <= 0
- DEBUT_SI
- b ← m
- FIN_SI
- SINON
- DEBUT_SINON
- a ← m
- FIN_SINON
- FIN_TANT_QUE
- AFFICHER m
- FIN ALGORITHME**

Algorithme en Python

```

from math import * # importe la bibliothèque math
def f(x):           # définition de f(x)
    return x*log(x)-1 # le ln se note log
def dichotomie(a,b,pre):
    while b-a > pre: # tant que b-a est > à la précision
        m = (a+b)/2 # calcul du milieu de l'intervalle
        if f(a)*f(m) <= 0: # si f(a) et f(m) sont de signes contraires
            b=m # alors translate la borne b en m
        else:
            a=m # sinon translate la borne a en m
    return m

```

Tableau à compléter (avec une précision de 0,1)

Étapes de l'algorithme	$[a, b]$	Milieu m	$f(a)f(m) < 0$?	Nouvel intervalle	Arrêt (condition $b - a > 0,1$) ?
Étape 1	$[1, 2]$	1,5	NON	$[1,5, 2]$	NON car $0,5 > 0,1$
Étape 2					
Étape 3					
Étape 4					

3.2 Étudier la dérivabilité d'une fonction

Q 22 - Étude de la dérivabilité d'une fonction en 0

[★★]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

Étudier la dérivabilité de f en 0.

<http://specialite-maths.fr>

3.3 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction

Q 23 - Comparaison entre e^x et $x + 1$

[★★]

Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$x + 1 \leq e^x$$

<http://specialite-maths.fr>

3.4 Problèmes nécessitant deux dérivations successives

Q 24 - Comparaison entre e^x et $x^2 + 1$

[★★★]

Démontrer que, pour tout réel x positif, on a :

$$e^x \geq x^2 + 1$$

<http://specialite-maths.fr>

3.5 Équation de la tangente

Q 25 - Tangente commune à deux courbes en un même point

[★★]

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2e} \text{ et } g(x) = \ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Calculer $f(\sqrt{e})$ et $g(\sqrt{e})$. En déduire que les courbes C_f et C_g admettent un point commun A .
2. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent la même tangente au point A .

<http://specialite-maths.fr>

Q 26 - Tangente commune à deux courbes en des points distincts

[***]

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $I =]0, 2]$ par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 4 \ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\varphi(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2} - 1$$

Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle I .

En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β sur I . Donner la valeur exacte de β .

2. Soit $\alpha \in I$. Exprimer, en fonction de α , une équation de la tangente $T_{f,\alpha}$ à la courbe C_f au point d'abscisse α .
3. Faire de même pour la fonction g avec $\beta \in I$.
4. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent une tangente commune dont on précisera une équation.

3.6 Lectures graphiques**Q 27 - Lecture graphique de nombres dérivés**

[*]

Soient f et g les fonctions dérivables sur \mathbb{R} représentées ci-dessous.

La droite T est tangente aux courbes C_f et C_g . La droite $T_{g,1}$ est tangente à C_g au point d'abscisse 1.

1. Lire graphiquement les abscisses des points d'intersection (visibles sur le graphique) entre C_f et C_g .
2. Lire graphiquement $f'(-1)$, $g'(3)$ et $g'(1)$.
3. On donne :

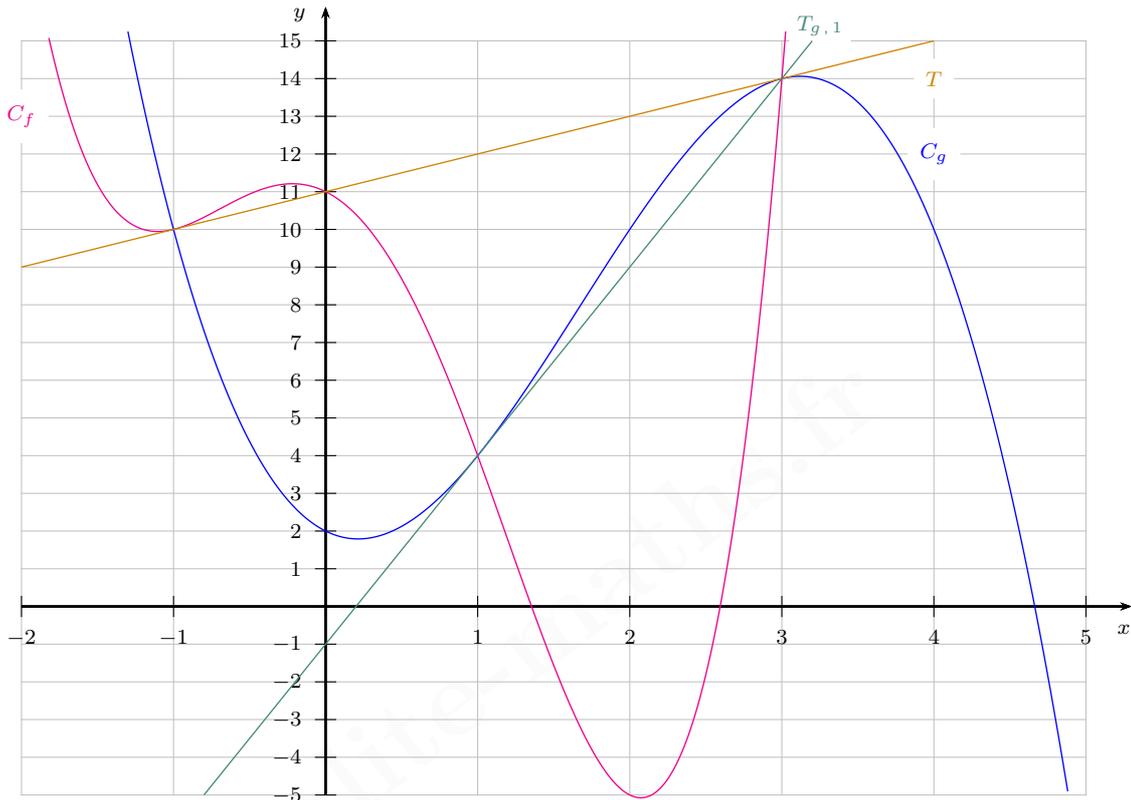
$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

Retrouver les résultats des deux questions précédentes par calcul.

4. Tracer, sur le graphique, les droites $T_{f,0}$ et $T_{g,0}$, respectivement tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse 0. Ces droites sont-elles parallèles ?

<http://specialite-maths.fr>

Représentation graphique :

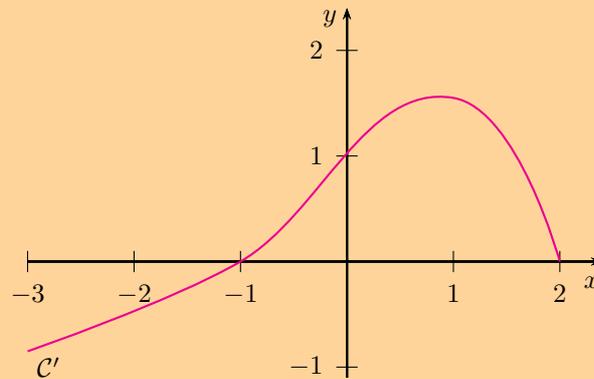


Q 28 - VRAI ou FAUX à partir de la courbe de la dérivée

[***]

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3, 2]$ telle que $f(0) = -1$.

On donne, ci-dessous, la représentation graphique C' de la fonction dérivée f' de f :



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leq 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1, 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, 2]$, $f(x) \geq -1$.
4. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f . La tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1, 0)$.

Q 29 - Détermination d'une fonction à partir d'informations graphiques

[***]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (b - x)e^{ax} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes}$$

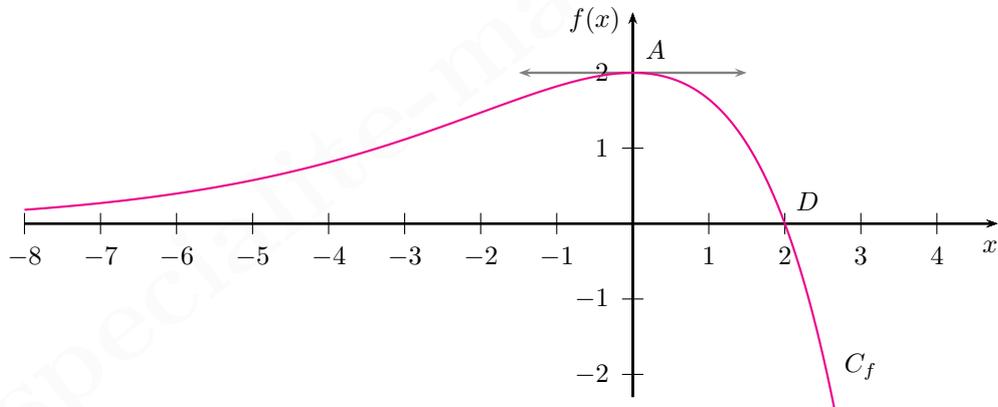
On note C_f la courbe représentative de la fonction f donnée ci-dessous. On sait que :

- les points $A(0, 2)$ et $D(2, 0)$ appartiennent à la courbe C_f ;
- la tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction des constantes a et b .
2. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
3. En déduire les valeurs des constantes a et b .

<http://specialite-maths.fr>

Représentation graphique de la fonction f :



Fonctions exponentielles et logarithmes

4.1 Résoudre une (in)équation

Q 30 - Résoudre une inéquation comportant une exponentielle

[**]

Un agriculteur cultive des tomates à partir de semis qu'il repique ensuite sous serre.

Après repiquage, la hauteur moyenne des plants au cours du temps est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{3}{2 + 22e^{-0,12t}}$$

où t est le temps exprimé en jours à partir du repiquage et $h(t)$ la hauteur moyenne du plant en mètres.

1. Calculer $h(0)$. Quelle est la taille moyenne des semis repiqués ?
2. Calculer la limite de la fonction h lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter.
3. Au bout de combien de temps, la taille moyenne d'un plant dépassera-t-elle 1 mètre ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 31 - Résoudre une (in)équation comportant des logarithmes

[**]

Dans chaque cas, préciser les contraintes (c'est-à-dire les nombres réels x pour lesquels l'(in)équation a un sens) puis résoudre :

1.
$$2 \ln(x - 2) = \ln(8 - x)$$

2.
$$\ln(x - 1) + \ln(x - 3) \leq \ln(2x - 5)$$

4.2 Étude de fonctions

Q 32 - Étudier une fonction comportant un logarithme

[**]

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Dresser le tableau de variations (complet) de f .

<http://specialite-maths.fr>

Q 33 - Fonction avec paramètre

[***]

Soit α un réel strictement positif. Soit f_α la fonction définie pour $x \in]0, +\infty[$ par :

$$f_\alpha(x) = x^2 - \alpha \ln(x)$$

Déterminer l'ensemble des valeurs du réel α pour lesquelles la fonction f_α est positive sur $]0, +\infty[$.

(On pourra étudier les variations de la fonction f_α .)

<http://specialite-maths.fr>

Q 34 - Utiliser une fonction auxiliaire

[***]

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.
2. Démontrer que, pour tout réel x non nul, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

3. En déduire le tableau de variation de f .

On pourra, pour cela, étudier la fonction auxiliaire φ définie pour tout réel x par :

$$\varphi(x) = e^x - 1 - xe^x$$

<http://specialite-maths.fr>

4.3 Avec des suites**Q 35 - Propriétés des logarithmes et suites**

[**]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$0 < u_{n+1} < u_n$$

En déduire que la suite (u_n) converge.

Pour la suite de l'exercice, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$, pour tout entier $n \geq 0$.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme v_0 .
3. En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n .
4. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est égale à e^2 .

<http://specialite-maths.fr>

Nombres complexes

5.1 Equations du second degré

Q 36 - Résolution d'équations du second degré

[★]

Résoudre, dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

$$z^2 = -16$$

$$9z^2 - 6z + 2 = 0$$

Q 37 - Résolution d'une équation à coefficients complexes

[★★]

On considère l'équation (E) suivante, dont l'inconnue z est un nombre complexe :

$$(E) : z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$$

1. Vérifier que le nombre complexe $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E) .
2. Déterminer trois nombres a , b et c tels que :

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

<http://specialite-maths.fr>

5.2 Nombre complexe conjugué

Q 38 - Résolution d'une équation complexe avec conjugué

[★]

Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation :

$$2z + 6\bar{z} + 8 + 4i = 0$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 39 - Détermination d'un ensemble de points

[★★★]

À tout nombre complexe z , on associe un nombre complexe Z défini par :

$$Z = 2z + 4i\bar{z}$$

1. Calculer Z lorsque $z = 2 - 3i$. Le résultat est-il un nombre réel ?
2. Calculer Z lorsque $z = 1 - 2i$. Le résultat est-il un nombre réel ?
3. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels Z est un réel.

<http://specialite-maths.fr>

5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe

Q 40 - VRAI ou FAUX avec justifications sur les nombres complexes

[**]

Soient Z et Z' des nombres complexes.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si Z est un nombre réel non nul, alors $\arg(Z) = 0 [2\pi]$.
2. Si $Z = 1 + i$ et $Z' = -\sqrt{2}$ alors $|Z| = |Z'|$.
3. Le nombre $4Z\bar{Z} + (Z - \bar{Z})^2$ est toujours un réel positif.
4. Si $Z = -1 - i\sqrt{3}$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{4\pi}{3} [2\pi]$.
5. On a toujours $|Z + Z'|$ qui est égal à $|Z| + |Z'|$.

<http://specialite-maths.fr>

Q 41 - Utiliser l'écriture ad-hoc pour calculer avec des nombres complexes

[**]

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.
L'écrire sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $Z = (1 + i\sqrt{3})^{11}$.
3. Déterminer l'argument principal de Z .

<http://specialite-maths.fr>

Q 42 - Calcul des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

[***]

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } Z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1. Déterminer la forme exponentielle et trigonométrique du produit $Z_1 Z_2$.
2. Déterminer la forme algébrique de Z_1 puis de Z_2 . En déduire celle du produit $Z_1 Z_2$.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Q 43 - Suite de nombres complexes

[**]

On considère la suite géométrique (Z_n) de nombres complexes de raison $1 + i$ et de terme initial $Z_0 = 1$.

1. Exprimer Z_n en fonction de n .
2. Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 .
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$Z_{4n} = (-4)^n$$

4. Déterminer le module et l'argument principal de Z_{2019} .

<http://specialite-maths.fr>

5.4 Nombres complexes et géométrie

Q 44 - Nombres complexes et distances

[***]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|z - 1| = \sqrt{2}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|z - i| = |z + 1|$.
3. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que :

$$|(1 + i)z - 2i| = 2$$

Le point O , origine du repère, appartient-il à cet ensemble ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 45 - Nombres complexes et géométrie

[**]

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + 3i \quad ; \quad z_B = -3 - i \quad ; \quad z_C = 2,08 + 1,98i$$

1. Calculer le nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle ABC .
2. Soit \mathcal{E} l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

$$|z + 2 - 3i| = |z + 3 + i|$$

Déterminer l'ensemble \mathcal{E} . Déterminer un réel k dont l'image K est élément de \mathcal{E} .

3. Le point D d'affixe $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ est-il élément de \mathcal{E} ?
4. Calculer l'aire du triangle ADB .

<http://specialite-maths.fr>

Géométrie dans l'espace

6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace

Q 46 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un vecteur normal et un point [★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(1, 3, -2)$ et le vecteur :

$$\vec{n} \begin{vmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et dont un vecteur normal est \vec{n} .

Q 47 - Plans perpendiculaires [★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P_1 d'équation cartésienne :

$$P_1 : 7x - 2y + 3z + 5 = 0$$

1. Le point $B(1, 2, 1)$ appartient-il au plan P_1 ?

Déterminer un point C d'abscisse nulle appartenant au plan P_1 .

2. Soit P_2 un plan de vecteur normal :

$$\vec{m} \begin{vmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

Déterminer ce vecteur normal de sorte que le plan P_2 soit perpendiculaire au plan P_1 .

3. Sachant que le point B appartient au plan P_2 , déterminer une équation cartésienne de ce plan P_2 .

6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques

Q 48 - Déterminer un système d'équations paramétriques d'une droite [★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A , B et C donnés par :

$$A(3, 0, -4) \quad ; \quad B(1, -1, -3) \quad ; \quad C(-1, 1, 4)$$

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB) .

2. Le point C est-il situé sur cette droite ?

Q 49 - Étudier l'intersection éventuelle de deux droites de l'espace

[**]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux droites D_1 et D_2 définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs suivants :

$$D_1 : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = -t + 6 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x = t' + 3 \\ y = 5t' + 1 \\ z = 2t' - 1 \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

Étudier si ces deux droites de l'espace sont sécantes et déterminer, le cas échéant, les coordonnées de leur point d'intersection.

<http://specialite-maths.fr>**Q 50 - Déterminer la droite d'intersection de deux plans sécants**

[***]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux plans P_1 et P_2 définis par les équations cartésiennes respectives suivantes :

$$P_1 : 2x + 3y - z + 5 = 0$$

$$P_2 : x - 2y + 4z - 3 = 0$$

Justifier que ces deux plans sont sécants et déterminer un système d'équations paramétriques représentant leur droite d'intersection D .

Préciser un vecteur directeur de cette droite D .

<http://specialite-maths.fr>**6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques****Q 51 - Équation d'un plan passant par trois points**

[***]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A , B et C donnés par :

$$A(3, 0, -4) \quad ; \quad B(1, -1, -3) \quad ; \quad C(-1, 1, 4)$$

1. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par ces trois points.

<http://specialite-maths.fr>

6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence

Q 52 - Points d'intersection d'un plan avec les axes de coordonnées

[★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P défini par l'équation cartésienne suivante :

$$P : 3x + 2y + 4z - 12 = 0$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels entre le plan P et les axes de coordonnées (Ox) , (Oy) et (Oz) .

<http://specialite-maths.fr>

Q 53 - VRAI ou FAUX avec justifications

[★★]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A , B et C donnés par :

$$A(0, -\sqrt{2}, 1) \quad ; \quad B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3) \quad ; \quad C(1, 1, 1)$$

Préciser si chacune des propositions suivantes est VRAIE (et dans ce cas la démontrer) ou FAUSSE (et dans ce cas, démontrer sa fausseté ou donner un contre-exemple).

1. L'équation cartésienne $y = 2x - \sqrt{2}$ est celle de la droite (AB) .
2. Un vecteur directeur de la droite (AB) est :

$$\vec{d} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. La distance AB est égale à $2\sqrt{3}$.
4. Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$(\sqrt{2} + 4)x - 2y - 2z = 0$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 54 - Incidence entre deux droites dans un cube - Calcul d'angle

[★★★]

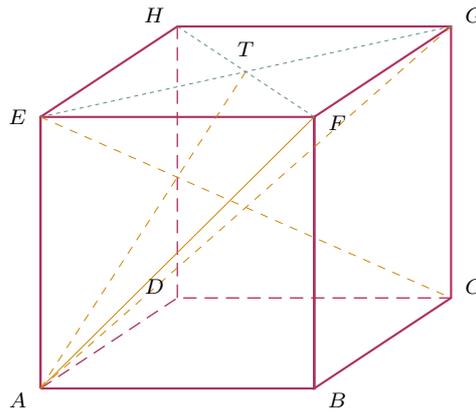
Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, de côté 1.

Le point T est le centre de la face $EFGH$.

On pourra se placer dans le repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Les droites (AT) et (EC) sont-elles orthogonales? Et les droites (AF) et (EC) ?
2. Démontrer que les droites (AT) et (EC) sont sécantes.
Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection Z .
3. Déterminer, au degré près, une mesure de l'angle (\vec{AG}, \vec{CE}) .

<http://specialite-maths.fr>



Q 55 - Incidence entre une droite et un plan dans un cube

[***]

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, de côté 1.

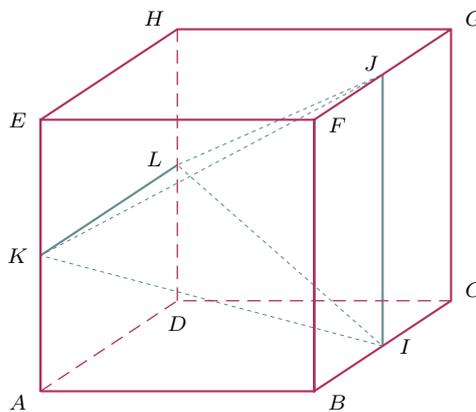
Les points I , J , K et L sont respectivement le milieu des segments $[BC]$, $[FG]$, $[AE]$ et $[DH]$.

Le solide $IJKL$ s'appelle un *berlingot*.

On pourra se placer dans le repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (IKL) .
2. Soit H le projeté orthogonal du point J sur le plan (IKL) .
Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (JH) .
3. En déduire les coordonnées du point H .
4. Calculer le volume du berlingot $IJKL$.

<http://specialite-maths.fr>



Calcul intégral

7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive

Q 56 - Cas où une primitive est suggérée par l'énoncé

[★★]

Soit f la fonction logarithme népérien :

$$f(x) = \ln(x) \text{ pour } x \in]0, +\infty[$$

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = x \ln(x) - x$$

est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

2. En déduire les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e \ln(x) \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_{1/2}^2 \ln(x) \, dx$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 57 - Utilisation d'une forme dont on connaît les primitives

[★★]

Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 58 - Cas où l'on obtient une primitive par transformation d'écriture

[★★]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

2. En déduire l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\ln(1/2)}^{\ln(2)} f(x) \, dx$$

<http://specialite-maths.fr>

7.2 Calcul de l'aire d'un secteur

Q 59 - Calcul de l'aire d'un secteur

[★]

On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{2-x}$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives de ces deux fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation suivante :

$$f(x) = g(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g .

2. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points (x, y) du plan tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq f(x) & \text{lorsque } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq g(x) & \text{lorsque } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

<http://specialite-maths.fr>

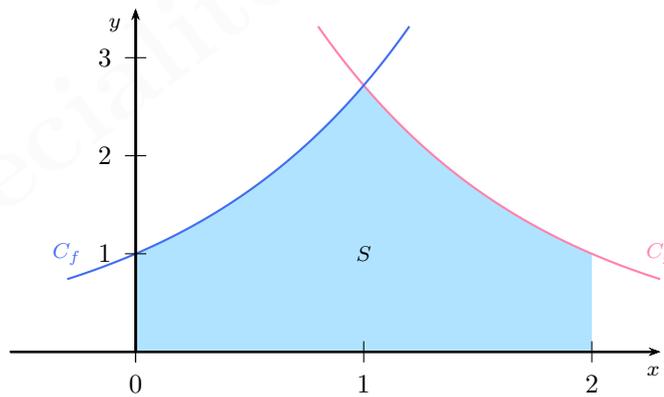


FIGURE 7.1 – Secteur S sous plusieurs courbes.

Q 60 - Calcul de l'aire d'un secteur (bis)

[***]

On considère les trois fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x \quad ; \quad g(x) = 1 - e^x \quad ; \quad h(x) = e \times x$$

On note C_f , C_g et D_h les représentations graphiques respectives de ces trois fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'inéquation suivante :

$$g(x) \leq f(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g .

2. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$h(x) \leq f(x)$$

Démontrer, de plus, que la droite D_h est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

3. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points (x, y) du plan tels que :

$$\begin{cases} g(x) \leq y \leq f(x) & \text{lorsque } x \leq 0 \\ h(x) \leq y \leq f(x) & \text{lorsque } x \geq 0 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

<http://specialite-maths.fr>

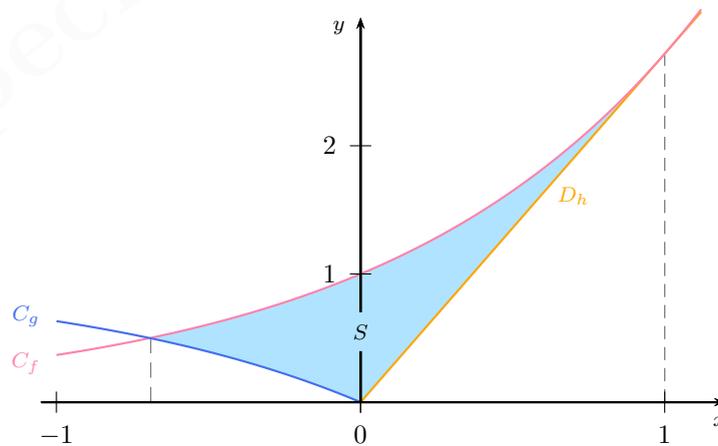


FIGURE 7.2 – Secteur S compris entre plusieurs courbes.

7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction

Q 61 - Calcul de la valeur moyenne d'une fonction

[★★]

La hauteur d'une plante, au cours du temps, est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{2}{1 + 10e^{-0,1t}}$$

où t est le temps exprimé en semaines ($0 \leq t \leq 300$) et $h(t)$ la hauteur de la plante exprimée en mètres.

Les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près.

1. Calculer la hauteur de la plante après 30 semaines, puis après 60 semaines.
2. Démontrer que, pour tout $t \in [0, 300]$, on a :

$$h(t) = 20 \times \frac{0,1e^{0,1t}}{e^{0,1t} + 10}$$

En déduire une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0, 300]$.

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[30, 60]$.
Interpréter le résultat.

<http://specialite-maths.fr>

7.4 Intégrales et suites

Q 62 - Étude d'une suite définie par une intégrale

[★]

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \int_0^1 e^x dx \text{ et } u_n = \int_0^1 x^n e^x dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

<http://specialite-maths.fr>

Q 63 - Étude d'une suite définie par une intégrale (bis)

[★★★]

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n} dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Calculer $\ln(2) - u_n$ en écrivant $\ln(2)$ sous la forme d'une intégrale.
En déduire la limite de la suite (u_n) .

<http://specialite-maths.fr>

Probabilités conditionnelles - Indépendance

8.1 Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales

Q 64 - Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales

[**]

Un élève de terminale est dans une série où le taux de réussite au baccalauréat est de 80%.

Après son année de terminale, qu'il ait eut son bac ou non, il passe un concours d'admission à une école dont les taux d'admissions sont les suivants :

- parmi les candidats bacheliers qui présentent ce concours, 60% sont admis dans cette école ;
- parmi les candidats non bacheliers qui présentent ce concours, 30% sont admis dans cette école.

1. Calculer la probabilité que l'élève ait son bac et soit admis dans l'école.
2. Calculer la probabilité que l'élève soit admis dans l'école.
3. Sachant que l'élève a été admis à l'école, quelle est la probabilité qu'il ait eut son bac ?

<http://specialite-maths.fr>

8.2 Indépendance d'événements

Q 65 - Indépendance d'événements

[**]

On lance deux dés à 6 faces, non truqués, et donc les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note A , B et C les événements suivants :

A : « la somme obtenue est un nombre premier »

B : « les deux dés affichent le même résultat »

C : « la somme obtenue est un multiple de 3 »

1. Calculer les probabilités de A , B et C .
2. Parmi les trois événements précédents, deux sont indépendants entre-eux ; lesquels ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 66 - Indépendance des événements contraires

[**]

1. Soient A et B deux événements indépendants.

Démontrer que A et \overline{B} sont également indépendants.

Démontrer que \overline{A} et \overline{B} sont également indépendants.

2. Une entreprise fabrique des tiges cylindriques. La probabilité de l'événement L : « la tige est conforme pour la longueur » est $\mathbb{P}(L) = 0,97$. On note D l'événement : « la tige est conforme pour le diamètre ». On suppose que L et D sont indépendants et on sait que $\mathbb{P}(\overline{L} \cup \overline{D}) = 0,12$. On prélève une tige au hasard. Calculer la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre.

<http://specialite-maths.fr>

8.3 Probabilités et suites**Q 67 - Probabilités conditionnelles et suites**

[★★]

Un archer étudie ses statistiques de réussite lors de séances de tirs à l'arc. Il remarque que lors d'une série :

- il possède 70% de chance de réussir le premier tir ;
- s'il réussit un tir, alors il gagne en confiance et possède 80% de chance de réussir le suivant ;
- s'il rate un tir, alors il perd confiance et ne possède plus que 60% de chance de réussir le suivant.

On note p_n la probabilité que l'archer réussisse le n -ième tir de la série.

1. À l'aide d'un arbre illustrant la transition entre n -ième et le $(n + 1)$ -ième tir, démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$$

2. On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = p_n - 0,75$$

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison q ainsi que son premier terme u_1 .

3. Exprimer u_n , puis p_n , en fonction de n .
4. Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter.

Arithmétique

9.1 Divisibilité - Division euclidienne

Q 68 - Propriétés de la divisibilité

[★]

Dans cet exercice, les nombres a et b désignent des entiers relatifs.

1. Développer et simplifier l'expression suivante :

$$6(2a + 3b) - 7(a + 2b)$$

2. En déduire que si le nombre 7 divise $2a + 3b$ alors il divise $5a + 4b$.
3. On voudrait maintenant étudier la réciproque de la question précédente.
Pour cela, déterminer deux entiers relatifs α et β tels que :

$$6(5a + 4b) - 7(\alpha a + \beta b) = 2a + 3b$$

La réciproque en question est-elle vraie ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 69 - Divisibilité et somme

[★★]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, en fonction de n , la somme suivante :

$$S_n = 1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{n-1}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n + 14$ est un multiple de 5.

<http://specialite-maths.fr>

Q 70 - VRAI ou FAUX sur la divisibilité

[★★]

Les nombres a , b et n ci-dessous sont des entiers naturels non nuls.

Pour chaque affirmation ci-dessous, dire si elle est vraie (et dans ce cas, la démontrer) ou fausse (et dans ce cas, donner un contre-exemple).

1. Si n divise $a + b$ et ab alors n divise a .
2. $n(n + 1)$ est toujours un entier pair.
3. Il existe des entiers a et b tels que $3a + 12b = 22$.
4. Si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n alors $a - b$ est un multiple de n .
5. n et n^2 ont la même parité.

<http://specialite-maths.fr>

Q 71 - Utilisation d'une division euclidienne

[***]

Dans cet exercice, n désigne un entier relatif.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 25 par 4 ? Et de 36 par 4 ?
Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est toujours 0 ou 1.
2. Démontrer que le cube de tout entier relatif n est de la forme $9k$, $9k + 1$ ou $9k + 8$.

<http://specialite-maths.fr>**Q 72 - Équation factorisable**

[*]

Dans cet exercice, x et y désignent des entiers naturels.

1. Dresser la liste des diviseurs de 28
2. En utilisant une factorisation, en déduire la résolution de l'équation suivante :

$$x^2 - 9y^2 = 28$$

Combien de couples solutions obtient-on ?

<http://specialite-maths.fr>**Q 73 - Équation de Pell-Fermat avec une infinité de solutions**

[***]

On désigne par (x, y) un couple d'entiers naturels solution de l'équation de Pell-Fermat suivante :

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

1. Démontrer que x est nécessairement un entier impair. En déduire que y est nécessairement un entier pair.
2. Démontrer que x et y sont premiers entre-eux.
3. Vérifier que le couple $(x, y) = (1, 0)$ est solution.
Démontrer que si le couple (x, y) une solution quelconque de l'équation de Pell-Fermat alors le couple $(3x + 4y, 2x + 3y)$ est également une solution de cette équation. En déduire deux nouveaux couples solution.
4. Écrire un algorithme qui permet de calculer et d'afficher n nouveaux couples solutions (n étant choisi par l'utilisateur) générés par cette méthode à partir du couple solution initial $(x, y) = (1, 0)$.

<http://specialite-maths.fr>

9.2 Entiers premiers entre-eux

Q 74 - Utiliser le théorème de Bézout pour prouver des propriétés du PGCD

[★]

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

On rappelle la propriété suivante : (Égalité de Bachet-Bézout)

Il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $au + bv = \text{PGCD}(a, b)$

En s'aidant éventuellement de cette propriété, démontrer les propriétés suivantes :

1. Si δ divise a et b alors δ divise $\text{PGCD}(a, b)$ et réciproquement.
2. Pour tout entier relatif k , $\text{PGCD}(ka, kb) = k \text{PGCD}(a, b)$. (Homogénéité du PGCD)
3. Si δ est un diviseur de a et b tel que $\text{PGCD}\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = 1$ alors δ est le PGCD de a et b .
4. Si a et b sont des entiers premiers entre-eux et divisent tous deux un entier c , alors le produit ab divise également l'entier c .

<http://specialite-maths.fr>

Q 75 - Suite de Fibonacci et nombres premiers entre-eux

[★★]

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1}u_{n-1} - (u_n)^2 = (-1)^n$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 76 - Entiers premiers entre-eux

[★★]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres n^2 et $n + 1$ sont premiers entre-eux.
2. Démontrer que si p est un nombre premier ne divisant pas un entier n , alors p et n sont premiers entre-eux.

Q 77 - Nombre premier divisant un carré

[★★]

Soit p un nombre premier divisant un carré n^2 .

Démontrer que p divise n .

<http://specialite-maths.fr>

Q 78 - Polynôme avec un coefficient principal égal à 1 et coefficients entiers

[**]

On considère la fonction polynôme P définie sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = x^2 + ax + b$$

où a et b sont des entiers.

Dans tout cet exercice, on suppose que la fonction polynôme P admet une racine rationnelle α . On peut donc écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre-eux.

1. Démontrer que l'on a nécessairement $p^2 = q(-ap - bq)$.
2. En déduire, à l'aide du théorème de Gauss, que α est un nombre entier.

<http://specialite-maths.fr>

Q 79 - Utilisation du lemme d'Euclide

[***]

Soient a , b et c des entiers relatifs non nuls.

On rappelle le théorème de Gauss :

Si a et b sont premiers entre-eux et si a divise le produit bc

Alors a divise c

1. À l'aide du théorème de Gauss ci-dessus, démontrer le lemme d'Euclide suivant :

Si p est un nombre premier divisant le produit ab alors p divise a ou p divise b

2. Application 1 : supposons que a et b sont premiers entre-eux. Démontrer qu'alors ab et $a + b$ sont également premiers entre-eux.
3. Application 2 : supposons que a et b sont premiers entre-eux. Démontrer qu'alors ab et $a^2 + b^2$ sont également premiers entre-eux.

<http://specialite-maths.fr>

Q 80 - Équation diophantienne

[**]

On considère l'équation (E) suivante dont les inconnues x et y sont dans \mathbb{Z} :

$$(E) : 7x - 5y = 1$$

1. Vérifier que le couple $(x, y) = (3, 4)$ est solution de (E) .
2. Démontrer qu'un couple (x, y) est solution de (E) si et seulement si $7(x - 3) = 5(y - 4)$.
3. En déduire que les solutions de (E) sont les couples (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

<http://specialite-maths.fr>

9.3 Congruences

Q 81 - Chiffre des unités

[★★]

Déterminer le chiffre des unités de 7^{2021} .

<http://specialite-maths.fr>

Q 82 - Congruences et disjonction des cas

[★★]

Soit n un entier naturel.

Démontrer que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier naturel.

<http://specialite-maths.fr>

Q 83 - Congruences et récurrence

[★]

Soit n un entier naturel.

Démontrer par récurrence que $n^3 - n \equiv 0 [3]$.

<http://specialite-maths.fr>

Q 84 - Congruences et récurrence (bis)

[★★]

1. Démontrer, à l'aide des congruences, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$4^n \equiv 1 [3]$$

2. Retrouver ce résultat grâce à un raisonnement par récurrence.

<http://specialite-maths.fr>

Q 85 - Résolution d'une équation modulo 11

[★★]

Résoudre l'équation $x^2 \equiv 5 [11]$.

<http://specialite-maths.fr>

Q 86 - Un critère de divisibilité par 11

[★★]

1. Démontrer que, pour tout entier naturel m , on a :

$$10^m \equiv (-1)^m [11]$$

2. Soit x un entier naturel à 4 chiffres. On note $x = \overline{abcd}$ son écriture décimale, autrement dit :

$$x = 1000a + 100b + 10c + d$$

où a , b , c et d sont des entiers compris entre 0 et 9.

Démontrer que x est divisible par 11 si et seulement si $a + c - (b + d)$ est divisible par 11.

3. On considère maintenant un entier naturel quelconque $x = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ à n chiffres. Les chiffres a_0 , a_2 , a_4 , etc, sont appelés les chiffres de rang pair. Les autres, à savoir a_1 , a_3 , etc, sont appelés les chiffres de rang impair.

Démontrer que x est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres pairs et la somme de ses chiffres impairs est divisible par 11.

<http://specialite-maths.fr>

Q 87 - Somme de deux carrés

[***]

1. Calculer le reste de la division euclidienne par 4 des sommes suivantes :

$$3^2 + 5^2 \qquad 2^2 + 6^2 \qquad 4^2 + 5^2$$

2. Démontrer que les nombres de la forme $4n + 3$ (où $n \in \mathbb{N}$) ne sont jamais la somme de deux carrés. (On pourra utiliser un tableau de calcul des carrés modulo 4)

<http://specialite-maths.fr>**Q 88 - Chiffrement affine**

[**]

Pour coder un message, on remplace chaque lettre à coder par son rang x où $0 \leq x \leq 25$ (voir tableau ci-dessous) puis on calcule $y \equiv 7x + 3 [26]$ qui nous donne le rang de lettre codée.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Rang	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1. Vérifier que la lettre M se transforme en la lettre J par ce codage puis coder le mot MATH.
 2. Démontrer que :

$$y = 7x + 3 [26] \iff x = 15y + 7 [26]$$

Que permet de faire la relation $x = 15y + 7 [26]$?

3. Décoder le mot KDR.

<http://specialite-maths.fr>**9.4 Nombres premiers****Q 89 - Des fausses conjectures sur les nombres premiers**

[*]

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 + n + 41$$

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 . Parmi ces nombres, lesquels sont premiers ?

Le nombre u_{40} est-il premier ?

2. On considère la suite (F_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1$$

Calculer F_0, F_1, F_2 . Ces nombres sont-ils premiers ?

Effectuer la division euclidienne de F_5 par 641. Le nombre F_5 est-il premier ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 90 - Utilisation d'une factorisation

[★★]

Soit n un entier naturel vérifiant $n \geq 2$.

1. Démontrer que :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2$$

2. Le nombre entier $n^4 + 4$ peut-il être premier ?
 3. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre $5^4 + 4$.

<http://specialite-maths.fr>

Q 91 - Nombres premiers et congruences

[★★★]

Soit p un nombre premier avec $p \geq 5$.

Démontrer que :

$$p^2 \equiv 1 [24]$$

<http://specialite-maths.fr>

Q 92 - Nombres de Mersenne

[★★★★]

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la suite (M_n) par :

$$M_n = 2^n - 1$$

1. Calculer M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 et M_7 . Parmi ces nombres, lesquels sont premiers ?
 2. On suppose dans cette question que n est un nombre composé que l'on peut écrire $n = rs$ où r et s sont deux entiers (diviseurs de n) avec $r \geq 2$. Exprimer, en fonction de n et de r la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{s-1} (2^r)^k$$

En déduire que $2^r - 1$ divise $2^n - 1$.

3. Démontrer que si M_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
 4. Effectuer la division euclidienne de M_{11} par 23. La réciproque de la propriété énoncée à la question précédente est-elle vraie ?

<http://specialite-maths.fr>

Matrices et suites matricielles

10.1 Calculs algébriques sur les matrices

Q 93 - Calculer l'inverse d'une matrice 2x2

[*]

1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que cette matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1} .

2. Démontrer que la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est égale à son inverse.

<http://specialite-maths.fr>

Q 94 - Calculer l'inverse d'une matrice 3x3 par factorisation

[**]

1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

<http://specialite-maths.fr>

Q 95 - Résoudre un système linéaire matriciellement

[*]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois plans définis ci-dessous par leurs équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : 3x - 5y + 2z - 7 = 0$$

$$P_2 : -4x + 3y + 3z - 23 = 0$$

$$P_3 : 5x + 4y - 2z + 1 = 0$$

On admet que ces trois plans se coupent en un unique point I .

Déterminer les coordonnées de I .

<http://specialite-maths.fr>

10.2 Suites de matrices

Q 96 - Suite géométrique matricielle

[★★]

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que :

$$U_{n+1} = AU_n$$

3. Calculer A^{20} à l'aide de la calculatrice. En déduire u_{20} .

<http://specialite-maths.fr>

Q 97 - Suite géométrique matricielle et suites couplées

[★★★]

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Démontrer que la suite (X_n) est géométrique (on pourra comparer AX_n et X_{n+1}) puis en déduire que :

$$X_n = A^n X_0$$

2. On donne les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On admet que P est inversible. Avec la calculatrice, préciser sa matrice inverse P^{-1} puis vérifier que :

$$A = PDP^{-1}$$

3. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$A^n = PD^n P^{-1}$$

4. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n puis étudier la convergence des deux suites (u_n) et (v_n) .

<http://specialite-maths.fr>

10.3 Graphes probabilistes

⚠ Selon les sujets de baccalauréat, l'état probabiliste est matérialisé par un vecteur colonne ou par un vecteur ligne ⁽¹⁾.

Q 98 - Graphe probabiliste - État stable

[**]

Au début d'une étude démographique portant sur les 1200 personnes d'une île, le quart de la population vivait dans la capitale. Depuis, chaque année, 40% des habitants de la capitale quittent celle-ci pour aller vivre dans le reste de l'île tandis que 20% des habitants du reste de l'île viennent habiter dans la capitale.

1. Décrire cette situation par un graphe probabiliste, donner sa matrice de transition M et l'état initial P_0 .
2. Déterminer, après 2 années, l'état probabiliste P_2 et l'interpréter.
3. Prouver qu'il existe un état stable P et l'interpréter.

<http://specialite-maths.fr>

Q 99 - Graphe probabiliste à trois sommets

[***]

Sur une île habitée apparaît une nouvelle maladie. Les individus peuvent alors être dans trois états distincts :

S : « l'individu est sain »

I : « l'individu est un porteur sain (il est infecté mais pas malade) »

M : « l'individu est malade »

Dans l'urgence, un traitement est proposé aux malades mais il reste peu efficace.

On remarque que d'une semaine à l'autre :

- parmi les personnes saines, 5% deviennent infectées et 5% deviennent directement malades ;
- parmi les personnes infectées, 30% deviennent malades (et les autres restent infectées) ;
- parmi les personnes malades, 20% guérissent grâce au traitement (et les autres restent malades).

Au départ, il y avait 5% des habitants infectés et 10% des habitants malades.

1. Décrire cette situation par un graphe probabiliste, donner sa matrice de transition M et l'état initial P_0 .
2. Déterminer les états probabilistes P_1 et P_2 des semaines suivantes et interpréter.
3. Prouver qu'il existe un état stable P et l'interpréter.

<http://specialite-maths.fr>

1. Voir par exemple le sujet *Amérique du Sud 2015* pour des matrices probabilistes en colonnes et le sujet *Amérique du Nord 2016* pour des matrices probabilistes en lignes.

Lois de probabilités

11.1 Lois discrètes

11.1.1 Lois discrètes quelconques

Q 100 - Calcul d'espérance

[★★]

Dans cet exercice, n est un entier vérifiant $n \geq 4$. On place n jetons dans une urne : un jaune et des blancs. À chaque fois que l'on choisit, au hasard, un jeton de l'urne on note :

$$J = \text{« le jeton obtenu est jaune »}$$

$$B = \text{« le jeton obtenu est blanc »}$$

On considère le jeu suivant : on choisit successivement deux jetons, avec remise. On gagne 16 euros si l'on obtient deux fois le jeton jaune ; on gagne 1 euro si l'on obtient deux fois un jeton blanc et on perd 5 euros sinon. On note X le gain algébrique en euros (+16 ; +1 ou -5).

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 16)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = -5)$ en fonction de n .
3. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n .
Combien de jetons faut-il mettre au total dans l'urne pour que ce jeu soit équitable?

<http://specialite-maths.fr>

11.1.2 Lois binomiales

Q 101 - Calculs avec la loi binomiale

[★★]

Un archer possède 40% de chance d'atteindre une cible. Il effectue 15 tirs successivement. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'il en réussisse exactement 10.
2. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au plus 6.
3. Calculer la probabilité qu'il en réussisse entre 8 et 12.
4. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au moins 6.
5. Combien de tirs peut-il espérer réussir ?

On donnera les résultats des probabilités à 10^{-4} près.

<http://specialite-maths.fr>

Q 102 - Étude d'une inéquation du type $a^n \leq b$ par algorithme et par calcul

[**]

On lance plusieurs fois de suite un dé (à 6 faces et bien équilibré).

On note n le nombre de lancers ($n \geq 2$) et X le nombre de 6 obtenus.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers) est :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2. Un informaticien conçoit l'algorithme suivant :

Algorithme en langage naturel

Déclarations	R est un réel n est un entier
Entrée	SAISIR le nombre R , compris entre 0 et 1
Initialisation	$n \leftarrow 0$
Traitement	TANT_QUE $1 - (5/6)^n < R$ DEBUT_TANT_QUE $n \leftarrow n + 1$ FIN_TANT_QUE
Sortie	AFFICHER le nombre n

Algorithme en Python

```
def nb_de_lancers(R) :
    n = 0
    while 1 - (5/6)**n < R :
        n = n + 1
    return n
```

Compléter le tableau suivant dans le cas où l'utilisateur rentre la valeur $R = 0,5$ dans l'algorithme ci-dessus :

Valeur de n	0	1	2				
Valeur de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	0						
Condition $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n < R$	Vrai						

Quelle valeur de n est affichée en sortie ?

Les résultats numériques de cette question seront arrondis à 10^{-4} près.

3. À l'aide de l'algorithme précédent, préciser combien de fois il faudrait lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 50%.
4. Retrouver le résultat précédent en résolvant, par un calcul rigoureux, l'inéquation $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,5$.

11.2 Lois à densité

11.2.1 Lois uniformes

Q 103 - Calculs directs et réciproques avec la loi uniforme

[★★]

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

Lorsqu'il se connecte sur le site, la durée nécessaire pour que les quatre amis soient réunis est une variable aléatoire D , exprimée en secondes.

On admet que cette variable aléatoire D suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20, 120]$.

- Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps inférieur à une minute.
- Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps compris entre 60 et 90 secondes.
- Un des amis remarque que dans 10% des cas, ils se retrouvent tous réunis en moins d'un certain temps t . Calculer ce temps t .
- Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D . Interpréter le résultat.

<http://specialite-maths.fr>

11.2.2 Lois normales

Q 104 - Lectures graphiques

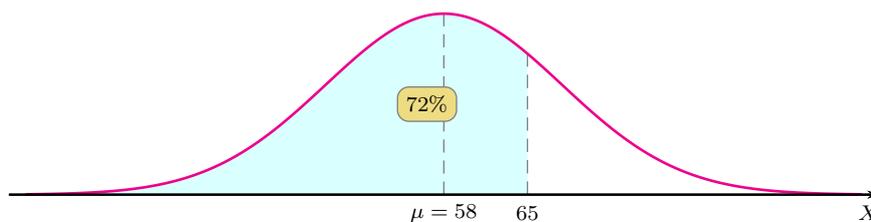
[★]

La vitesse (en km/h) des véhicules passant sur une route à un certain radar est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 58$ km/h.

On dispose de l'information donnée sur le graphique ci-dessous, à savoir $\mathbb{P}(X \leq 65) = 0,72$.

Déterminer, en justifiant :

- $\mathbb{P}(X \geq 65)$.
- $\mathbb{P}(58 \leq X \leq 65)$.
- $\mathbb{P}(51 \leq X \leq 65)$.
- $\mathbb{P}(X \geq 51)$.
- $\mathbb{P}(X = 65)$.

<http://specialite-maths.fr>


Q 105 - Calculs directs et réciproques avec la loi normale

[★★]

Dans une population, on étudie la taille des individus.

La moyenne des individus est $\mu = 1,76$ m. L'écart-type est $\sigma = 0,10$ m.

On choisit un individu au hasard et on note X sa taille.

On admet que cette variable aléatoire X suit une loi normale \mathcal{N} de moyenne μ et d'écart-type σ . On notera ⁽¹⁾ $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Calculer la probabilité que cet individu mesure moins de 1,80 m.
2. Calculer la probabilité que cet individu mesure entre 1,70 m et 1,80 m.
3. Calculer la probabilité que cet individu mesure plus de 2 m.
4. On sait que cet individu est tel que 75% des personnes de la population sont plus petites que lui. Quelle taille mesure cet individu ?

On arrondira les calculs numériques à 10^{-4} près.

<http://specialite-maths.fr>

Q 106 - Intervalles de centre μ et de rayon $k\sigma$

[★★]

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

1. Via un centrage et une réduction, retrouver les valeurs des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$$

On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

2. Application : on suppose dans cette question que $\mu = 100$ (σ est inconnu). On donne $\mathbb{P}(X \geq 108) \approx 0,023$. En déduire une valeur approchée de $\mathbb{P}(X \leq 96)$ à 10^{-3} près.

<http://specialite-maths.fr>

Q 107 - Détermination d'un écart-type

[★★★]

Une entreprise industrielle fabrique des pièces dont la longueur X doit satisfaire certaines contraintes.

On admet que cette longueur X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 65$ mm et d'écart-type σ . Le service qualité considère une pièce conforme lorsque $64 \leq X \leq 66$.

Le cahier des charges est tel que l'entreprise souhaite obtenir au minimum 92% de pièces conformes.

1. Sur la machine utilisée par l'entreprise, le réglage optimal permet d'avoir un écart-type $\sigma = 0,7$. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme si la production est faite sur cette machine. Les exigences du cahier des charges sont-elles atteintes ?
2. L'entreprise envisage l'achat d'une nouvelle machine plus performante. Mais plusieurs choix de machines sont proposées au catalogue avec, pour chacune d'entre-elles, des valeurs de σ différentes. Calculer la valeur maximale de σ que doit posséder une machine afin qu'elle produise au minimum 92% de pièces conformes.

1. certains auteurs ou ouvrages notent $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Q 108 - Détermination d'un intervalle centré de probabilité donnée

[***]

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

On note Φ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ où } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On rappelle que :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$$

1. Soit k un réel vérifiant $0,5 \leq k < 1$.

Démontrer que l'équation $\Phi(x) = k$ admet une unique solution u dans \mathbb{R}_+ .

2. En déduire que, pour tout réel α tel que $0 < \alpha \leq 1$, l'équation $\mathbb{P}(-x \leq Z \leq x) = 1 - \alpha$, d'inconnue x , admet une unique solution u_α dans \mathbb{R}_+ .
3. Préciser $u_{0,50}$ et $u_{0,05}$. Interpréter et illustrer.
4. Application : dans un pays, la taille des individus suit une loi normale de moyenne 174 cm et d'écart-type 15 cm. Les institutions de santé de ce pays souhaitent attribuer une allocation aux 4% des individus qui sont trop éloignés de cette moyenne (plus précisément aux 2% qui sont trop « petits » ainsi qu'aux 2% qui sont trop « grands »). Quelles bornes sur la taille ces institutions doivent-elles fixer pour obtenir ces proportions ?

<http://specialite-maths.fr>

Q 109 - Approximation de la loi binomiale par la loi normale

[***]

On lance 100 fois une pièce monnaie (bien équilibrée).

On note X le nombre de fois où l'on obtient le côté PILE ($0 \leq X \leq 100$).

Les calculs numériques seront arrondis à 10^{-4} près.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ dont on précisera les paramètres n et p .
Calculer son espérance μ et son écart-type σ .
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 50 fois le côté PILE.
Calculer la probabilité d'obtenir entre 40 et 60 fois le côté PILE.
3. Vérifier que les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.
On approche la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ précédente par une variable aléatoire X' qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ⁽²⁾.
Recalculer les probabilités demandées à la question 2 dans ce nouveau contexte.
L'approximation est-elle pertinente ?
4. Afin de minimiser l'erreur obtenue dans l'approximation de la binomiale par la loi normale, certains statisticiens effectuent une « correction de continuité ». Cela consiste à calculer $\mathbb{P}(49,5 \leq X' \leq 50,5)$ avec la loi normale lorsqu'on cherche à approximer $\mathbb{P}(X = 50)$. De même, on calculera $\mathbb{P}(39,5 \leq X' \leq 60,5)$ pour approcher $\mathbb{P}(40 \leq X \leq 60)$. Cette correction de continuité améliore-t-elle l'approximation faite lorsqu'on remplace la loi binomiale par la loi normale ?

<http://specialite-maths.fr>

2. certains auteurs ou ouvrages notent $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Mais dans tous les cas, il s'agit de la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

11.2.3 Lois exponentielles**Q 110 - Calculs avec la loi exponentielle**

[**]

Une entreprise fabrique des robots. Le service qualité étudie leur fiabilité. On note T le temps (exprimé en année) au bout duquel survient la première panne d'un de ces robots. On admet que T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Les probabilités seront données à 10^{-2} près.

1. Interpréter par une phrase la condition $\mathbb{P}(T > 6) = 0,30$.
Déterminer la valeur de λ , à 10^{-2} près, pour que cette condition soit satisfaite.
Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,20$.
2. Calculer la probabilité qu'un robot fonctionne au moins deux années sans avoir de pannes.
3. Calculer la probabilité que la première panne survienne après trois ans et avant cinq ans.
4. L'entreprise souhaite communiquer un slogan publicitaire du type « 75% de nos robots fonctionnent x mois sans la moindre panne ». Déterminer cette durée x (au mois près) qu'il faut annoncer dans le slogan.
5. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore durant 4 ans supplémentaires (au moins) sans la moindre panne?

<http://specialite-maths.fr>

Intervalles de fluctuation et de confiance

Q 111 - Intervalle de fluctuation - Règle de décision

[**]

Une élection a eu lieu et un candidat, Monsieur G. GANIET, est élu avec 72% des suffrages exprimés.

Suspicieux ou mauvais perdant, un autre candidat, Monsieur D. MAULI, demande un recomptage des voix dans deux bureaux de vote :

- dans le bureau n° 1, 500 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 75% des suffrages ;
- dans le bureau n° 2, 1000 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 79% des suffrages.

1. Sachant que sur l'ensemble des suffrages exprimés, le candidat G. GANIET a obtenu un score de 72%, calculer un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95%, de la fréquence des voix en sa faveur pour un échantillon de taille $n = 500$.

Peut-on considérer que le score de 75% dans le bureau de vote n° 1 est significativement éloigné du score de référence de 72% au point d'affirmer (avec un niveau de confiance de 95%) qu'il y a eu une fraude dans ce bureau de vote ?

2. Même question avec le bureau de vote n° 2 (on calculera un intervalle de fluctuation asymptotique pour un échantillon de taille $n = 1000$).

<http://specialite-maths.fr>

Q 112 - Intervalle de confiance - Détermination de la taille d'un échantillon

[**]

À l'approche d'une élection, un institut effectue un sondage auprès d'un échantillon de 1000 personnes en leur demandant si elles sont prêtes à voter pour le candidat Monsieur J. KHROA. À l'issue de ce sondage, il s'avère que 52% des personnes interrogées se disent prêtes à voter pour ce candidat.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion des électeurs prêts à voter pour Monsieur J. KHROA.

2. Quelle est l'amplitude, en points, de cet intervalle ?

3. On voudrait désormais avoir un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, ayant une amplitude de 2 points seulement. Calculer la taille de l'échantillon des personnes à interroger pour parvenir à cet objectif.

<http://specialite-maths.fr>

Découvrez les corrigés détaillés ainsi que des rappels de cours sur notre site :

<http://specialite-maths.fr/>

specialite-maths.fr

Index

A

accroissement moyen, 14
 aire, 28
 algorithme, 6, 8, 9, 34, 44
 de dichotomie, 13
 de seuil, 12
 amplitude d'un intervalle, 49
 approximation
 loi binomiale par loi normale, 47
 argument
 d'un nombre complexe, 21, 22
 principal, 21
 asymptotes, 11
 axes de coordonnées, 25

C

calcul
 d'aire, 28
 de distance, 22
 calcul intégral, 27
 centrage et réduction, 46
 chiffrement
 affine, 38
 codage
 affine, 38
 comparaison
 de fonctions, 14
 comparaison de nombres, 5
 congruences, 37, 39
 conjecture, 4
 conjugué d'un nombre complexe, 21
 cosinus, 21
 critère
 d'indépendance, 31
 de divisibilité par 11, 37

D

dés, 31
 distance, 22
 divisibilité
 par 11, 37
 division euclidienne, 34
 double dérivation, 14
 droites
 orthogonales, 25, 26
 sécantes, 24

E

écart-type, 46
 échantillon conforme ou non, 49
 entiers premiers entre-eux, 35, 36
 équation
 avec logarithmes, 18
 avec nombres complexes, 20
 cartésienne d'un plan, 23
 de la tangente, 14
 de Pell-Fermat, 34
 diophantienne, 34, 36

espérance, 43
 état
 initial, 42
 probabiliste, 42
 stable, 42
 événements contraires, 31
 exponentielle, 11, 14, 18, 19, 27–29

F

fonction
 Φ , 47
 auxiliaire, 19
 dérivable, 14, 16
 polynôme, 11
 primitive, 27, 30
 forme
 algébrique d'un nombre complexe, 21
 exponentielle d'un nombre complexe, 21
 indéterminée, 11, 12
 trigonométrique d'un nombre complexe, 21
 formule
 des probabilités totales, 31

G

géométrie dans l'espace, 23
 graphe
 probabiliste, 42

H

hérédité, 4

I

inéquation, 18
 avec exponentielles, 18
 avec logarithmes, 18
 indépendance, 31
 initialisation, 4
 intégrales, 27
 intervalle
 de confiance, 49
 de fluctuation, 49
 intervalle et loi normale, 46

L

lectures graphiques, 15
 lemme
 d'Euclide, 36
 limite
 d'un polynôme, 11
 d'une fonction, 11
 d'une fonction rationnelle, 11
 d'une suite, 32
 d'une suite géométrique, 7
 logarithme, 4, 11, 14, 18, 19, 27, 44
 loi
 à densité, 45
 binomiale, 43
 discrète, 43

exponentielle, 48
normale, 45
uniforme, 45

M

matrice
 de transition, 42
 inverse d'une $-$, 40
mesure d'angle, 22
module d'un nombre complexe, 21, 22
moyenne, 30

N

nature d'un triangle, 22
nombres complexes, 20
nombres de Mersenne, 39

P

paramètre, 18
partie
 imaginaire d'un nombre complexe, 21
 réelle d'un nombre complexe, 21
Pell-Fermat
 équation de $-$, 34
point
 d'intersection, 24
pourcentages, 5
premiers entre-eux, 36
primitive, 30
primitives, 27
probabilités conditionnelles, 31
produit scalaire, 25, 26

R

réurrence, 4, 8, 9, 19, 21, 35
réurrence et somme, 4

S

sachant que, 31
second degré, 20
signe
 de la différence, 14
sinus, 21
somme, 4
 des termes d'une suite géométrique, 6, 33
suite
 arithmético-géométrique, 10
 arithmétique, 6
 auxiliaire, 10, 19
 bornée, 8
 convergente, 8
 croissante, 9, 30
 décroissante, 8
 de Fibonacci, 35, 41
 divergente, 9
 géométrique, 5, 6, 10, 19, 21, 32
 géométrique matricielle, 41
 majorée, 30
 monotone, 8
 stationnaire, 4
suites couplées, 34, 41
suites et intégrales, 30
suites et probabilités, 32

système, 24
système d'équations paramétriques
 d'une droite de l'espace, 23
système linéaire, 40

T

tableau
 de variations, 14, 18, 19
tangente, 14, 15, 17, 29
tangente commune, 14
taux
 de variation, 14
théorème
 de Bézout, 35
 de Gauss, 36
 de la bijection, 13
 des gendarmes, 30
 des valeurs intermédiaires, 13
 Moivre et Laplace, 47

V

valeur moyenne d'une fonction, 30
vecteur(s)
 de probabilités, 42
 directeur, 23, 25
 normal, 23, 24
 orthogonaux, 23
vrai ou faux, 16, 21, 25, 33