112 questions « type-bac » **2020**

Série **S** - Mathématiques

Enseignement obligatoire ET de **spécialité**

Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Félicitations !
Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;

4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

`http://specialite-maths.fr/`

Table des matières

Suites et récurrence

À QUOI ÇA SERT ?

Les suites permettent de modéliser l'évolution de certains phénomènes : par exemple l'évolution d'un capital placé au cours des années (formule $C_n = C_0(1+i)^n$ où i est le taux d'intérêt), ou encore l'évolution d'une probabilité p_n par rapport à certaines unités de temps, ou encore traduire certaines propriétés mathématiques : la suite des entiers impairs $(2n-1)$ ou $(2n+1)$, des carrés (n^2) des puissances de 2 à savoir (2^n), etc. On utilise pour cela la notation indicielle (avec la lettre u ou une autre, peu importe) : u_0 est généralement la valeur initiale (parfois u_1) et u_n désigne la valeur à la n-ième étape du processus (ou terme de rang n). Le successeur du terme u_n est alors noté u_{n+1}. Et le successeur de u_{n+1} est alors u_{n+2}. Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ puis pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Chaque terme s'obtient en faisant la somme des deux précédents.
On obtient alors $u_2 = u_1 + u_0 = 1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$ etc.
Contrairement aux fonctions pour lesquelles la variable x est un réel, dans les suites, la variable n est un entier naturel. Une suite est en fait une fonction définie sur $\mathbb{N}$. La plupart des suites sont « quelconques » mais certaines ont des propriétés spécifiques :
○ suites arithmétiques : on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r : $u_{n+1} = u_n + r$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 + nr$ (on passe de u_0 à u_n en ajoutant n fois la raison r) ;
○ suites géométriques : on passe de chaque terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité q : $u_{n+1} = u_n \times q$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 \times q^n$ (on passe de u_0 à u_n en multipliant n fois par la raison q) ;
○ suites croissantes : chaque terme est inférieur au suivant : $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$;
○ etc.
Comme on l'a vu ci-dessus, certaines suites sont définies de façon « explicite » comme par exemple $u_n = n^2 + 3$. Dans ce cas, on peut immédiatement calculer n'importe quel terme de la suite (par exemple $u_5 = 28$) mais on ne saisit pas forcément le lien entre deux termes successifs. D'autres suites sont définies par « récurrence » (de proche en proche) comme par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ (on donne la valeur d'un terme initial puis une formule donnant chaque terme qui se définit à partir du (ou des) précédent(s)). Dans ce cas, on voit le *lien* entre les termes (on passe d'un terme au suivant en ajoutant les entiers impairs successifs) mais on ne peut pas calculer immédiatement n'importe quel terme de la suite. Souvent, dans les exercices, on doit passer d'une écriture à l'autre. Par exemple en partant de la formule explicite $u_n = n^2 + 3$ on peut chercher une relation de récurrence. Pour cela on ré-écrit la formule en remplaçant u_n par u_{n+1} :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 = u_n + 2n + 1$$

Pour passer de la relation de récurrence à la formule explicite, c'est plus délicat... sauf si on a réussi à conjecturer la formule...

1.1 Récurrence

À QUOI ÇA SERT ?

Le principe de raisonnement par récurrence permet de démontrer des propriétés qui sont **indexées par un entier** n telles que par exemple :

$$11^n + 9 \text{ est un multiple de 10 quel que soit l'entier naturel } n$$

Pour démontrer une telle propriété, on ne va pas s'amuser à vérifier qu'elle est vraie pour $n = 0$, puis pour $n = 1$ puis pour $n = 2$ etc. On ne peut pas faire une infinité de vérifications ! En revanche, si on arrive à démontrer que la propriété est *héréditaire* alors il suffira de prouver qu'elle est vraie « au départ » pour en déduire qu'elle vraie à tout rang n. Dans notre exemple, l'hérédité est simple à prouver car on a toujours :

$$11^{n+1} + 9 = 11^n \times 11 + 9 = 11^n \times (10 + 1) + 9 = 11^n \times 10 + 11^n + 9$$

Ce calcul montre simplement « qu'on passe » de $11^n + 9$ à $11^{n+1} + 9$ en ajoutant $11^n \times 10$ qui est justement un multiple de 10. Ainsi, si on suppose que pour un certain n arbitrairement fixé, $11^n + 9$ est un multiple de 10 alors il en sera de même pour $11^{n+1} + 9$. C'est l'hérédité. Et comme la propriété est vraie pour $n = 0$ (car $11^0 + 9 = 10$) alors elle est vraie à tout rang n.
Le raisonnement par récurrence est très utile pour l'étude de certaines suites (lorsqu'on connaît le processus qui permet de passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1}) notamment le sens de variation (croissance ou décroissance de la suite), ou la preuve de l'existence d'un majorant M (resp. d'un minorant m).

RAPPEL DE COURS

Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$.
SI :
- la propriété $\mathcal{P}$ est INITIALISÉE à un certain rang n_0, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}$$ [1]

- la propriété $\mathcal{P}$ est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0, c'est-à-dire :

$$\text{pour } n \geqslant n_0, \ \Big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\Big)$$

ALORS : La propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout rang n plus grand que n_0.

En pratique, on rédige une récurrence en suivant les quatre étapes ci-dessous :

1. on énonce la propriété de travail $\mathcal{P}(n)$;

2. on vérifie l'initialisation en examinant si l'on a $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$ selon le cas) ;

3. on vérifie l'hérédité. Pour cela, on suppose $\mathcal{P}(n)$ **pour un certain entier** n (vérifiant $n \geqslant n_0$) et on en déduit la propriété au rang suivant, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$;

4. on conclut en affirmant que l'on a ainsi démontré que, pour tout entier n (vérifiant $n \geqslant n_0$), on a $\mathcal{P}(n)$.

1. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » ! ?

Q 1 - Démontrer une conjecture

[⋆] [44%]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

1. Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer [2] que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2^n - 1$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n, ce qui démontre la conjecture.

. . . .

2. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses. . .). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété resultant d'un certain nombre d'observations.